إرشاد العُجم

لأعمال الجذور الصم

لمحمد بن أبي الفتح محمد بن الشرقي أبي الروح
عيسى بن أحمد الصوفي الشافعي المصري



تحقيق ودراسة وتحليل

مصطفى موالدي



مؤسسة الفرقان للتراث الإسلامي

إرشاد العُجم
لأعمال الجذور الصم

منشورات الفرقان: رقم 125





Al-Furqān Islamic Heritage Foundation

22A Old Court Place
London W8 4PL, UK
Tel: + 44 203 130 1530
Fax: + 44 207 937 2540
Email: info@al-furqan.com
Url: www.al-furqan.com

إرشاد العُجم

لأعمال الجذور الصم

لمحمد بن أبي الفتح محمد بن الشرقي أبي الروح
عيسى بن أحمد الصوفي الشافعي المصري

تحقيق ودراسة وتحليل

مصطفى موالدي



(Al-Furqān Cataloguing in Publication Data): :(بيانات الفرقان للفهرسة أثناء النشر)

موالدي، مصطفى
إرشاد العُجم لأعمال الجذور الصم لمحمد بن أبي الفتح محمد بن الشرقي أبي الروح عيسى بن أحمد الصوفي الشافعي المصري/ تحقيق مصطفى موالدي

Irshād al-'Ujm li A'māl al-Judhūr al-Ṣum (Guide to Operations on Irrational Radicals for Neophytes) by Muḥammad b. Abī al-Fatḥ Muḥammad b. al-Sharqī Abī al-Rūḥ 'Īsā b. Aḥmad al-Ṣūfī al-Shāfi'ī al-Miṣrī/ Edited, annotated & introduced by: Prof. Moustafa Mawaldi

لندن: مؤسسة الفرقان للتراث الإسلامي 1432هـ/ 2011 م
330 ص: 24 سم – (منشورات الفرقان: 125)
1- تاريخ الرياضيات - 2- التكعيب والجذر التكعيبي، عمليات حول الجذور الصماء البسيطة و المركبة - 3- محمد بن أبي الفتح محمد بن الشرقي أبي الروح عيسى بن أحمد الصوفي الشافعي – أ- مؤسسة الفرقان للتراث الإسلامي – لندن – ب- موالدي، مصطفى (محقق) – جـ- العنوان – د- السلسلة

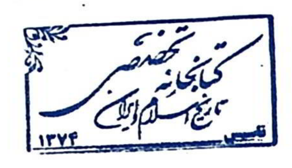
774 p; 24cm.- (Al-Furqān Islamic Heritage Foundation no. 124). vol. I
1-History of *Mathematiques* - 2- Cubes and cube roots, Operations on Simple Irrational and Compound Radicals - 3- Muḥammad b. Abī al-Fatḥ Muḥammad b. al-Sharqī Abī al-Rūḥ 'Īsā b. Aḥmad al-Ṣūfī al-Shāfi'ī al-Miṣrī- I-Al-Furqān Islamic Heritage Foundation, (London, Great Britain) – II Mawaldi, Moustafa (Ed.) III Title. IV. Series.

ISBN 1-905122-35-7

Published by Al- Furqān Islamic Heritage Foundation.

22A Old Court Place, London W8 4PL, UK





تقديم

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على آخر الأنبياء والمرسلين الذي جاء برسالة العلم والإيمان وحضارة الإنسان وبعد . . .

فقد تجاهل كثير من العلماء الغربيين أن حضارتهم المعاصرة خرجت من رحم الحضارة الإسلامية وخصوصا في الحقول العلمية ، وجهل الكثير من العرب والمسلمين تلك الحقيقة الهامة .

ومن أولى أهداف مؤسسة الفرقان للتراث الإسلامي إزاحة الغبار وكشف الستار عن تلك الحقيقة .

ففي حقل الرياضيات ، فقد تطور هذا العلم في العصور الإسلامية الأولى حين ترجم العلماء العرب المؤلفات الرئيسية واستوعبوها ، ثم انتقلوا لمرحلة التأليف ، ليصلوا بعدها لمرحلة تعميم الرياضيات وانتشارها بين عموم الناس .

وتعتبر مخطوطة **إرشاد العجم لأعمال الجذور الصم** لمحمد ابن أبي الفتح محمد بن الشرقي أبي الروح عيسى بن أحمد الصوفي الشافعي المصري (كان حيًا سنة ٩٤٣هـ/ ١٥٣٦م) ضمن تلك المرحلة ، التي لا تقل أهمية - في حضارتنا- عن المراحل السابقة ، وذلك لانتقال العلم من الخاصة إلى العامة ، واستفاد الناس من تطبيقات الإنجازات الفكرية التي قدمها الرياضيون العرب .

وتلقي المخطوطة الضوء على عمل من أعمال هذا العالم العربي الجليل الذي كتب في مجالات علمية دقيقة: الرياضيات والفلك والميكانيكا ، والذي لم تلق مؤلفاته الاهتمام ، ونتمنى أن يحرض نشر المخطوطة الباحثين لتحقيق أعماله الكثيرة ودراستها ووضعها في المكان المناسب من سلسلة تاريخ العلم .

إن مخطوطة **إرشاد العجم لأعمال الجذور الصم** مخطوطة نادرة ووحيدة في مكتبات العالم وشاملة في موضوع أعمال الجذور الصم، وتتميز المخطوطة - أيضًا - باستخدامها للرموز المتنوعة، ودقة نتائجها البالغة التي تسبق عصرها، وتخصصها بموضوع دقيق وهام، وبمنهجها المنطقي السليم المتسلسل والمترابط، وعرضها لقوانين كثيرة صحيحة حتى عصرنا الحاضر.

حقق المخطوطة الباحث الأستاذ الدكتور مصطفى موالدي- أستاذ تاريخ الرياضيات وتحقيق المخطوطات في معهد التراث العلمي العربي بجامعة حلب والحائز على جائزة مؤسسة الكويت للتقدم العلمي لأعماله العلمية المتميزة- تحقيقًا علميًا دقيقًا وفق أصول التحقيق المنهجية ودرسها وحللها، والكتاب بين أيديكم شاهد على التحقيق الجاد والرصين.

ويسرّ **مؤسسة الفرقان للتراث الإسلامي** نشر هذا الكتاب ضمن سلسلة منشوراتها العلمية، ومساهمة منها في إحياء التراث العلمي العربي/ الإسلامي والتعريف به. ونرجو أن يكون عونًا للباحثين، ونسأله تعالى أن يجعله خالصًا لوجهه الكريم.

أحمد زكي يماني
رئيس مؤسسة الفرقان للتراث الإسلامي



شكر وتقدير

يسرّني أن أتقدم بخالص الشكر وجزيل الامتنان لمعالي الشيخ أحمد زكي يماني المحترم – رئيس مؤسسة الفرقان للتراث الإسلامي– على موافقته الكريمة طباعة كتابي في مؤسسته المتميزة بأهدافها النبيلة ومنشوراتها العلمية الرصينة، ويُعد نشر كتاب في تاريخ الرياضيات العربية تقدير خاص للتراث العلمي في حضارتنا العربية/ الإسلامية، فله مني كل الاحترام والتقدير على تبنيه هذا الجانب الفكري الدقيق من حضارتنا العلمية.

والشكر موصول للسادة الأساتذة أعضاء مجلس إدارة مؤسسة الفرقان الموقرين على قبولهم نشر الكتاب ضمن خطة عمل المؤسسة.

وأشكر السيد الأستاذ محمد دريوش– رئيس قسم الفهرسة والمشاريع والنشر بمؤسسة الفرقان– على متابعته الحثيثة لطباعة الكتاب.

وأتقدّم بالشكر للسيد الأستاذ الدكتور أحمد يوسف أحمد محمد– مدير معهد المخطوطات العربية بالقاهرة–، والسيد الأستاذ الدكتور فيصل الحفيان– منسق برامج المعهد–، على تزويدي بنسخة عن المخطوطة.

وأتوجه بالشكر الجزيل للأخ الأستاذ الدكتور حسن عبد المحسن على تدقيقه اللغوي لهذا الكتاب.

وأقدر صبر أسرتي الكريمة– والمتمثلة بزوجتي العزيزة الدكتورة المهندسة مها الشعار وبناتي الغاليات: لمى وندى ولينا – على تخصيصي إجازاتهم وعطلهم وأوقات راحتهم لإنجاز كتابي هذا، فلهم مني كل التقدير والمحبة الصادقة، وأرجو من الله تعالى أن يمنحني الصحة والعافية كي أعوضهم بأوقات أفضل، وأتمنى لأسرتي الغالية مستقبلاً زاهرًا.

وأخيرًا أشكر كل من قدم يد العون لإنجاز طباعة الكتاب.

أ. د. مصطفى موالدي



تحقيق ودراسة وتحليل مخطوطة

إرشاد العجم لأعمال الجذور الصم

لمحمد بن أبي الفتح محمد بن الشرقي أبي الروح
عيسى بن أحمد الصوفي الشافعي المصري

المقدمة

عالج الرياضيون العمليات الرياضية على الأعداد الصم ضمن مؤلفاتهم وبشكل جزئي، حيث نجد بعض الطرق التقريبية البسيطة لإيجاد الجذر التربيعي للأعداد الصم في الحضارة البابلية، وكذلك في الحضارة اليونانية.

اهتم رياضيو الحضارة العربية / الإسلامية بموضوع الأعداد الصم ودرسوا القوانين الخاصة بها، وطوروها وابتكروا قوانين جديدة تعطي نتائج أدق، وخصصوا فصلاً من كتبهم لمعالجة الموضوع.

يهدف الكتاب إلى تقديم مخطوطة نادرة ووحيدة في مكتبات العالم بعد تحقيقها تحقيقًا علميًا دقيقًا وفق أصول التحقيق المنهجية ودراستها وتحليلها وهي مخطوطة إرشاد العجم لأعمال الجذور الصم لمحمد بن أبي الفتح محمد بن الشرقي أبي الروح عيسى بن أحمد الصوفي الشافعي المصري (كان حيًا سنة ٩٤٣هـ/ ١٥٣٦م).

والمخطوطة مخصصة بشكل كامل لمعالجة وشرح العمليات الرياضية المطبقة على الأعداد الصم وبالتفصيل، مما يعطي المخطوطة طابعها الخاص المميز من باقي الأعمال الرياضية التي خصصت أحد فصولها فقط لبعض العمليات الرياضية على الأعداد الصم.

يبدأ الكتاب بعصر المؤلف بشكل مختصر جدًا، ثم ينصب محتوى الكتاب - بشكل رئيس - على تحقيق المخطوطة ودراستها، وتحليلها والذي يتضمن العناصر

المعتمدة لتحقيق أي مخطوطة ، والمؤلفة من نبذة عن حياة المؤلف وكتبه ، واستعراض عام لمحتوى المخطوطة ، ووصف للمخطوطة ، وشرح للمنهج المتبع لإثبات النص ، وإثبات للنص المحقق مع فهارسه ، ثم تقديم الدراسة الرياضية للنص وذلك بترجمة محتوى النص إلى علاقات رياضية مستخدمين الرموز الرياضية الحديثة ، ثم إلقاء الضوء على الجانب التاريخي للموضوعات الرياضية الرئيسة في المخطوطة ، وختم الكتاب بالنتائج والمصادر والمراجع المعتمدة في الكتاب .

سنتبع في استعراض الكتاب المخطط التالي:

- **المقدمة.**
- **عصر المؤلف.**
- **تحقيق مخطوطة « إرشاد العجم لأعمال الجذور الصم » ودراستها وتحليلها:**

١ - التعريف بمؤلف المخطوطة .

٢ - محتوى المخطوطة على نحوٍ عام .

٣ - وصف المخطوطة .

٤ - طريقة إثبات النص .

٥ - صورة عن بداية المخطوطة ونهايتها .

٦ - النص المحقق .

٧ - فهرس المصطلحات العلمية .

٨ - الدراسة الرياضية .

٩ - الدراسة التاريخية .

- **الخاتمة.**
- **المصادر والمراجع.**
- **فهرس المحتوى.**

عصر المؤلف:

يعد محمد بن أبي الفتح محمد بن الشرقي أبي الروح عيسى بن أحمد الصوفي الشافعي المصري من علماء القرنين التاسع والعاشر الهجريين/ الخامس عشر والسادس عشر الميلاديين، عاش أبو الفتح في مصر أواخر العصر المملوكي الضعيف[1] الذي كثرت فيه الفتن، وبداية العصر العثماني القوي.

اتجه العلماء - في تلك الفترة - إلى التأليف الموسوعي[2] للحفاظ على التراث المبعثر، إلى جانب ذلك اهتم العلماء بوضع الأراجيز والكتب المركزة جدًا، مما دفع بعض العلماء إلى تأليف الشروح والحواشي والتعليقات على ذلك النوع من المؤلفات، بهدف تبسيطها لطلاب العلم، ومن ثم انصبت جهود العلماء على وضع مؤلفات تدريسية، ويندرج كتاب أبي الفتح تحت هذا النوع من الكتب، ويتضح ذلك من منهجه المتبع في عرضه للمادة العلمية، وتدرج المسائل وحلها من الأسهل إلى الأصعب، ويكشف منهجه بوضوح الهدف التعليمي للمخطوطة.

۞۞۞

---

(١) فروخ، عمر، **معالم الأدب العربي في العصر الحديث**، دار العلم للملايين، بيروت - لبنان، ١٩٨٦م، الجزء الثاني، الصفحتان ٥١-٥٢.

(٢) **سبط المارديني**، بدر الدين محمد بن محمد، **مخطوطة إرشاد الطلاب إلى وسيلة الحساب**، تحقيق ودراسة وتحليل مصطفى موالدي، منشورات جامعة حلب - معهد التراث العلمي العربي-، ٢٠٠٤م، الصفحة ١٢.



تحقيق مخطوطة

إرشاد المُجِد لأعمال الجُذور الصُّمّ

ودراستها وتحليلها

١ - التعريف بمؤلف المخطوطة.

٢ - محتوى المخطوطة على نحو عام.

٣ - وصف المخطوطة.

٤ - طريقة إثبات النص.

٥ - صورة عن بداية المخطوطة ونهايتها.

٦ - النص المحقق.

٧ - فهرس المصطلحات العلمية.

٨ - الدراسة الرياضية.

٩ - الدراسة التاريخية.

١ - التعريف بمؤلف المخطوطة:

يلتف الغموض حول شخصية محمد بن أبي الفتح محمد بن الشرقي أبي الروح عيسى بن أحمد الصوفي الشافعي، فقد تجاهلت معظم المصادر الرئيسة حياته، ويتكهن المؤرخون عصره وتاريخ وفاته، فإسماعيل البغدادي في كتابه **هدية العارفين**[١] يشير إلى أنه توفي في حدود سنة ٩٥٠ هـ، وحاجي خليفة في كتابه **كشف الظنون**[٢] يقول بأنه ألف كتاب **الإعلام بشد البنكام** في صفر سنة ٩٤٣هـ، وبناء عليه يؤكد كونتش[٣] وكحالة[٤] على أنه كان حيًا في سنة ٩٤٣هـ/ ١٥٣٦م، بينما نجد في **فهرس مخطوطات دار الكتب الظاهرية**[٥] بأنه

توفي سنة ٩٤٣هـ/ ١٥٣٦م، ومن ثم لايمكن حسم هذه الاختلافات إلا بدراسة أعماله العلمية التي لم يحقق معظمها، وبشكل مبدئي يمكننا القول **بأنه كان حيًا سنة ٩٤٣هـ/ ١٥٣٦م**.

من الأعمال العلمية المنسوبة إلى المؤلف:

تُنسب مجموعة كبيرة من الكتب إلى محمد بن أبي الفتح في مجالات: الرياضيات

---

(١) **البغدادي**، إسماعيل باشا، **هدية العارفين - أسماء المؤلفين وآثار المصنفين** - منشورات مكتبة المثنى، بغداد، د. ت، المجلد الثاني، صفحة ٢٣٨.

(٢) **حاجي خليفة**، مصطفى بن عبد الله، **كشف الظنون عن أسامي الكتب والفنون**، منشورات مكتبة المثنى، بغداد، د.ت، (المجلد الأول: الصفحة ١٢٧)، (المجلد الثاني: الصفحتان ٩٦٦-٩٦٧).

(٣) **كونتش**، باول، **فهرس المخطوطات المصورة**، الجزء الثالث: العلوم، القسم الأول: الفلك، التنجيم، الميقات، منشورات معهد المخطوطات العربية، القاهرة، ١٩٥٨م، الصفحات ٢٠، ٧٣، ١٠٦.

(٤) **كحالة**، عمر رضا، **معجم المؤلفين - تراجم مصنفي الكتب العربية** -، طبع بنفقة رفعت رضا كحالة، مطبعة الترقي بدمشق، ١٣٧٧هـ/ ١٩٥٩م، (الجزء التاسع: الصفحة ١٥)، (الجزء الحادي عشر: الصفحتان ١٠٣، ١٠٦).

(٥) **خوري إبراهيم**، **فهرس مخطوطات دار الكتب الظاهرية - علم الهيئة وملحقاته** -، مطبوعات مجمع اللغة العربية بدمشق، دمشق، ١٩٦٩م، الصفحتان ٢٠٥ -٢٠٦.

والفلك والميكانيك، وقد جمعها روزنفيلد وأكمل الدين إحسان أوغلي(١) في كتابهما: **رياضيو وفلكيو الحضارة الإسلامية وأعمالهم بين القرنين السابع والتاسع عشر الميلاديين**، الصادر باللغة الإنكليزية في استانبول عام ٢٠٠٣م.

وأشار حميدان(٢) وكنج(٣) والعزاوي(٤) إلى بعضها. وفيما يلي قائمة لتلك الأعمال:

أ - الرياضيات:

١ - **إرشاد العجم لأعمال الجذور الصم** (المخطوطة المدروسة).

٢ - فائدة في شرح قطعة في جنس خارج القسمة.

ب - الفلك:

١ - تسهيل زيج الغ بك.

٢ - تقويم الكواكب السبعة.

٣ - الزيج.

٤ - الرسالة الشمسية في الأعمال الجيبية.

٥ - مقدمة على وضع البسيطة المسماة بالرخامة بطريق الهندسة.

---

(١) ROSENFELD (B.) & IHSANOGLU(E.), *Mathematicians, Astronomers * other Scholars of Islamic Civilization and their works (7^{th} – 19^{th} C.)* , Research Center for Islamic History, Art and Culture, Istanbul, 2003, PP.300-303.

(٢) **حميدان**، زهير، **أعلام الحضارة العربية الإسلامية في العلوم الأساسية والتطبيقية**، منشورات وزارة الثقافة، دمشق - سورية، ١٩٩٦م، (المجلد الرابع: الصفحات ٢٩٥-٢٩٨)، (المجلد السادس: الصفحات ٢١٢-٢١٣، ٢٦٢).

(٣) **كنج**، ديفيد، **فهرس المخطوطات العلمية المحفوظة بدار الكتب المصرية**، الهيئة المصرية العامة للكتاب بالتعاون مع مركز البحوث الأمريكي بمصر ومؤسسة سميثسونيان، القاهرة، ١٩٨١، الجزء الأول، الصفحة ٢٤٩.

(٤) **العزاوي**، عباس، **تاريخ علم الفلك في العراق**، مطبوعات المجمع العلمي العراقي، العراق، ١٩٥٨م، الصفحات ٢٠٤-٢٠٦.

٦ - طريقة حساب المائلة ورسمها بسمت الاعتدال .

٧ - كتاب الجواهر في معرفة السمت وفضل الدائر .

٨ - الرسالة المفصلة في العمل بنصف دائرة المعدل .

٩ - رسالة في العمل بالربع المجنح في علم الفلك ، العمل المصحح بالربع المجنح .

١٠- رسالة في العمل بصندوق اليواقيت .

١١- في الربع الكامل .

١٢- نزهة الناظر في وضع خطوط فضل الدائرة .

١٣- عمدة ذوي الألباب في معرفة استخراج الأعمال الفلكية بالحساب بغير حجاب .

١٤- في مطالع وطول وعرض القمر والهلال .

١٥- رسالة في حساب مواقع السموت المقنطرات .

١٦- سلم المنارة في مقومات الكواكب السيارة .

١٧- نتائج الفكر في المباشرة بالقمر .

١٨- جدول لاستخراج فضل الدائر .

١٩- بلوغ الوطر في العمل بالقمر .

٢٠- السهل الممتع في العمل بالبسيط المرتفع .

٢١- جدول المحلول الثاني على أصول ألغ بك .

٢٢- جداول تعديل القمر .

٢٣- نبذة الإسعاف في معرفة قوس الخلاف .

٢٤- منية الطلاب في تحصيل غالب القواعد الفلكية بالحساب .

٢٥- جدول الدائر الأفقي .

٢٦- نهاية الرتبة في العمل بالنسبة الستينية .

٢٧- الصراط المستقيم في حل مقومات القمر من الدر اليتيم .

٢٨- فصل في المنحرفة بالقبة التي وضعها المؤيدية عام ٨٢٤هـ .

٢٩- جدولان لرسم منحرفات (٩ ٥٩) و (٢٧ ٦١) لعرض غير مذكور .

٣٠- جدول مقوم الجوزهر لطول (ند نه) على الرصد الجديد لألغ بك .

٣١- جداول في التنجيم .

٣٢- الجواهر النيرات في العمل بربع المقنطرات .

٣٣- دستور يتضمن حساب كسوف شمس واقع في **يوم الاثنين ١٩ شعبان ٩٣٤**.

٣٤- الاستيعاب في العمل بصدر الإوز وجناح الغراب .

٣٥- رسالة في معرفة وضع الجدول الشامل لفضل الدائر والسموت .

ج - الميكانيك :

١ - رسالة بعلم شد البنكام .

٢ - رسالة في إصلاح فساد القبان .

٣ - إرشاد الوزان لمعرفة الأوزان بالقبان .

٤ - رسالة في قسمة القبان بطريق الهندسة والمساحة والحساب بنسب الأرباع .

٥ - رسالة في قسمة القبان بطريق الحساب .

٦ - تحفة النظار في إنشاء الغيار من أصل المعيار .

اعتقد بأن تحقيق ودراسة تلك الأعمال قد تكشف عن خطأ نسبة بعضها إلى محمد بن أبي الفتح ذاته ، وذلك بسبب إشارة كتب التراجم إلى أكثر من « محمد ابن أبي الفتح » وإلى أكثر من « الصوفي المصري » .

❁❁❁

٢ - محتوى المخطوطة على نحوٍ عام:

تتضمن المخطوطة إرشاد العجم لأعمال الجذور الصم الموضوعات التالية:

الصفحة

---

(١) ببعض: في بعض–خ – (الفعل: « ضرب » يتعدى بحرف الجر « الباء »).

الصفحة



٣ - وصف المخطوطة

مخطوطة فريدة[١] محفوظة في دار الكتب المصرية تحت رقم /٦٦٣ رياضة/، ويوجد نسخة عنها في معهد المخطوطات العربية[٢] بالقاهرة تحت رقم /١٧٥ حساب/، وهي في /٥٥/ ورقة[٣]، ناقصة الورقة الأولى، طول[١] كل منها /١٥/ سنتيمترًا وعرضها /١٠/ سنتيمترًا، تقع بين صفحتي /١ و/ و /٥٥ظ/، وكل صفحة تحتوي بين /١٥/ و /١٩/ سطرًا، وعلى الأغلب بين /١٦/ و /١٧/ سطرًا، وكل سطر على /٨-٩/ كلمات وسطيًا، تمت كتابة المخطوطة بخط نسخي للمؤلف سنة ٨٩٧هـ/ ١٤٩١ - ١٤٩٢م.

تُرك لصفحات المخطوطة هامش عليه إضافة كلمة ناقصة في الصفحتين: (٢ظ) و (٢٩ظ)، وهناك حاشيتان توضيحيتان بخط الكاتب في الصفحة (٢٣ظ).

تعتمد المخطوطة نظام التعقيبة لترتيب الأوراق، ونلاحظ ترقيمًا حديثًا لأوراق المخطوطة في أعلى الزاوية اليسارية لأوجه الأوراق.

استخدمت في المخطوطة بعض الرموز منها:

[ك٨ = كعب الثمانية،] [جـ٣ = جذر ثلاثة] ، (و = زائد)، (لا = ناقص)، (جـ = جذر جذر)، (جـ = جذر جذر جذر جذر)،

---

(١) كنج، ديفيد، **فهرس المخطوطات العلمية المحفوظة بدار الكتب المصرية**، الهيئة المصرية العامة للكتاب بالتعاون مع مركز البحوث الأمريكي بمصر ومؤسسة سميثسونيان، القاهرة، ١٩٨١م، الجزء الأول، الصفحة ٢٤٩.

(٢) أشكر **السيد الأستاذ الدكتور أحمد يوسف أحمد محمد - مدير معهد المخطوطات العربية**- لموافقته على تزويدي بصورة ورقية عن هذه المخطوطة كهدية، وأشكر **السيد الأستاذ الدكتور فيصل الحفيان - منسق برامج المعهد** - على تسهيله الحصول على الصورة بسرعة.

(٣) **الصوفي**، محمد بن أبي الفتح محمد بن الشرقي أبي الروح عيسى بن أحمد، **إرشاد العجم لأعمال الجذور الصم**، مخطوطة دار الكتب المصرية، رقم ٦٦٣.

[١٦و ٢٤٠ = ستة عشر وجذر مائتين وأربعين مأخوذًا جذر ذلك ،] ،...

وضعت أحيانًا علامات إهمال الأحرف مثلًا: (وانحط = ح) في السطر الخامس من الصفحة ١ ظ) ،

[أرادو = في السطر الرابع من الأسفل من الصفحة ١ ظ] .

تستخدم الدائرة وبداخلها نقطة ⊙ في نهايات الفصول أحيانًا والفقرات الهامة كذلك .

يُكتب العدد « ثلاثة » بشكله الجديد والحالي « ثلاثة » ، وأحيانًا بهذا الشكل «٣» .

أولها: « . . .< كلمة غير واضحة بعد النقص> لجذور الأعداد الصم طريقًا لتحقيقه بطريق حساب الأعداد المنطقة ، واستعملوا جذورها بالتقريب،...» .

آخرها: « . . .وهو المكعب المطلوب ، وهكذا صورته :

$$\frac{١\ ٤\ ٢\ ٧\ ٦\ ٦}{٢\ ٥\ ٥\ ٨\ ٨\ ٩}$$

فاعلم ذلك ، وقس على ما ذكرناه تصب إن شاء الله تعالى» .

٤ - طريقة إثبات النص:

أما بشأن إثبات النص ، فقد كانت الحواشي إيجابية تمامًا ، أي أننا أشرنا تقريبًا إلى كل الأصول والتصحيحات .

وقد اختصرنا قدر الإمكان تدخلنا في النص ، إلا في حالة الخطأ الذي يعرقل الفهم الصحيح للنص .

فيما يلي القاعدة التي اتبعناها لإثبات النص:

١ - الأقواس والرموز:

- النص:

< . . . . > القوسان المكسوران يحصران ما نضيفه.

/ ابتداء صفحة المخطوطة.

و وجه صفحة المخطوطة.

ظ ظهر صفحة المخطوطة.

- الهوامش:

- يشار إلى التعليق برقم الحاشية.

- يفصل بين الرواية المثبتة والرواية غير المثبتة بنقطتين.

- رمزنا لرواية المخطوطة بحرف (خ).

٢ - طرق الإحالة:

أحلنا إلى المخطوطة بالإشارة إلى رقم الورقة متبوعًا بـ « و» (وجه) أو «ظ» (ظهر).

بالنسبة للفهارس كانت الإحالة إلى الصفحة بأرقام مشرقية.

٣ - الشكل:

ضبطنا بعض الكلمات لتجنب الالتباس مثل: يُعْلَم، المَوَسِّط، . . . .، ويضبط الناسخ - أحيانًا - بعض الكلمات مثل: وَهَذا (٢ ظ)، اجْذار (٢ ظ)، . . . .

٤ - علامات الترقيم:

قمنا بإضافة علامات الترقيم إلى النص مثل: النقاط (. . . .)، والنقطتين (:) والفاصلة (،)، وإشارة الاستفهام (؟)، وعلامات التنصيص « . . . . .»، . . .، وذلك لتسهيل قراءة النص وفهمه، ولتجنب أي غموض.

٥ - تقسيم النص:

حافظنا على تقسيم النص الأصلي إلى مقدمة وفنين وخاتمة .

٦ - العناوين:

أوردنا عناوين: المقدمة والفنين والخاتمة والفصول ، ووضعناها في منتصف الصفحة وعلى سطر واحد أو عدة أسطر .

٧ - الكتابة:

تقيدنا بالأشكال الإملائية المقبولة حاليًا في النص بمجمله ، إذ كتبنا «مأخوذًا» بدلاً من «ماخودا» (١ ظ) ، و «شاء» بدلاً من «شا» (١ ظ) ، . . . . ، علمًا بأن الناسخ في النص - بشكل عام - لايلتزم بكتابة الهمزة بشكلها الصحيح ، فقد قمنا بإثباتها بشكلها الصحيح ، ولم نشر إلى هذا الخطأ في الحواشي .

أضفنا قطعة الكاف الناقصة ، إذ كتبنا «كجذر» بدلاً من «لجدر» (١ ظ) ؛ وفي معظم الأحيان يهمل الناسخ تنقيط الأحرف المنقوطة ، فقد ثبتنا النقاط الواجبة ، إذ كتبنا «الثلاثة» بدلاً من « الىلاىه » (٢ ظ) ، . . . .؛ وميزنا الهاء النهائية عن التاء المربوطة إذ كتبنا «خمسة» بدلاً من خمسه (١ ظ) ، . . . .؛ ولم نشر إلى تلك الأخطاء في الحواشي .

أما بشأن الأرقام المكتوبة حسب طريقة الكتابة القديمة - المستخدمة في إيران حاليًا - ، فقد تبنينا طريقة الكتابة الحالية ، وكتبنا «٥» بدلاً من « ۵ » (٢ ظ) ، و«٤» بدلاً من « عـر » (٢ ظ) ، ولم نشر إلى تلك الأخطاء في الحواشي .

وكتبنا كلمة «الأعلى» بدلاً من « الاعلا » وأشرنا إلى ذلك في الحواشي ، ورسمنا قطعة الهمزة في الابتداء « أ » و « إ » للزيادة في الإيضاح .

وميزنا في الرسم - على نحو دائم - بين الياء المعجمة بنقطتين من تحت والألف المرسومة بصورة الياء .

٨ - محتوى الحواشي:

- الرواية المثبتة والرواية الواردة في المخطوطة .
- بدايات صفحات المخطوطة .
- التصحيحات العلمية المتناسبة مع التسلسل المنهجي والعلمي للمسائل .



٥ - صورة عن بداية المخطوطة ونهايتها

فلما لم يجدوا للجذور الاعداد الصم طريقا لتحقيقها بطريق
حساب الاعداد المنطقة واستعملوا جذورها بالتقريب فافسد
عليهم اعمالهم المحققة بواسطة ذلك التقريب احتاجوا ان
يستنبطوا طرقا لاستخراج جذورها بالتحقيق من مادة الكم
المتصل بالبرهان الهندسي فتصرفوا في مربعات تلك الاعداد ومربعات
مربعاتها باعمال خاصة بها من ضرب وجمع وطرح وقسمة وتسمية وجذر
فخرجت لهم هذه الاعمال على غاية السداد فسلمت اعمالهم من الفساد
وقد استخرت الله سبحانه ووضعت هذه الرسالة المسماه
بارشاد العجم لاعمال الجذور الصم مرتبا لها على مقدمة وفنين
وخاتمة واسال الله الهداية في البداية والنهاية انه على ما يشا
قدير وبالاجابة جدير المقدمه
اعلم ايدك الله وايانا بروح منه ان الخط على قسمين مفرد
ومركب والمفرد اما منطق في الطول وهو الذي يعلم نسبة الواحد
اليه او نقول هو عدد يمكن النطق به خال عن لفظ الجذر كخمسة
واما اصم وهو الذي لا يمكن النطق به الا بلفظ الجذر او لا يعلم
نسبة الواحد اليه ثم منه المنطق بالقوة وهو الذي يذكر معه لفظ
الجذر مع واحد ولان مربعه هو المنطق به كجذر خمسة فان مربع جذره

إرشاد العجم لأعمال الجذور الصم

مخطوطة دار الكتب المصرية – رقم ٦٦٣ رياضة، صفحة (١ و)

هذا على التسعة التي هي ضلع المكعب المضروب فيه فكان
خارج القسمة ستة اتساع وستة اثمان تسع تسع وسبعة
اثمان ثمن تسع التسع وخمسا ثمن ثمن التسع واربعة اخماس
خمس ثمن ثمن التسع ونصف خمس خمس ثمن ثمن التسع وهو المكعب
المطلوب وهكذا صورته

٦	٦	٧	٢	٤	١
٩	٨	٨	٥	٥	٢

فاعلم ذلك وقس على ما ذكرناه تصب ان شاء الله تعالى
وتمت هذه الرسالة المسماه بارشاد العجم لاعمال الجذور الصم
بيمن الله وتوفيقه ومنه وهو الموصل في احكامه وعليه التوكل
في الهدايه والصلاة والسلام على سيدنا محمد المؤيد بكتائب
الرعب ومواكب العنايه وعلى آله واصحابه ذوي المكارم والولايه
وسلم تسليما كثيرا على يد مؤلفها العبد الفقير الى الله تعالى
محمد سبط الشيخ محمد بن الشيخ ابي الروح عيسى بن محمد الصلوفي ابن عمر
المصري لطف الله بهم وبالمسلمين في سنة سبع وسبعين وثمانمائة
والحمد لله وحده وصلواته على سيدنا محمد وآله وصحبه وسلم وحسبنا الله ونعم الوكيل

إرشاد العجم لأعمال الجذور الصم

مخطوطة دار الكتب المصرية – رقم ٦٦٣ رياضة ، الخاتمة (٥٥ ظ)



النص المحقق



إرشاد العُجم لأعمال الجذور الصم

لمحمد بن أبي الفتح محمد بن الشرقي أبي الروح
عيسى بن أحمد الصوفي الشافعي المصري

[١و] [1] / < كلمة غير واضحة بعد النقص> لجذور الأعداد الصم طريقًا لتحقيقه بطريق حساب الأعداد المنطقة، واستعملوا جذورها في التقريب[2]، فأفسدت عليهم أعمالهم المحققة بواسطة ذلك التقريب، احتاجوا أن يستنبطوا طرقًا لاستخراج جذورها بالتحقيق من مادة الكم المتصل بالبرهان الهندسي، فتصرفوا في مربعات تلك الأعداد، ومربعات مربعاتها بأعمال خاصة بها من ضرب وجمع وطرح وقسمة وتسمية وجذر، فخرجت لهم هذه الأعمال على غاية السداد فسلمت أعمالهم من الفساد، وقد استخرت الله سبحانه ووضعت هذه الرسالة المسماة **بإرشاد العُجّم لأعمال الجذور الصم** مرتبًا لها على مقدمة وفنين وخاتمة، وأسأل الله الهداية في البداية والنهاية؛ إنه على ما يشاء قدير وبالإجابة جدير.

❁❁❁

(١) إن المخطوطة مخرومة البداية، وبحسب تقديرنا ينقصها ورقة: صفحة العنوان وصفحة فاتحة الكتاب.

(٢) في التقريب: بالتقريب – خ –/.

مقدمة

اعلم < أيدك> الله وإيانا بروح منه ، إنَّ الخط على قسمين: مفرد ومركب ، والمفرد: **إمَّا منطق في الطول**: وهو الذي يُعلم نسبة الواحد إليه ، أو تقول: هو عدد يمكن النطق به خال عن لفظ الجذر كخمسة .

وإمّا أصم: وهو الذي لا يمكن النطق به إلا بلفظ الجذر ، أو لا يُعلم نسبة الواحد إليه .

فمنه **المنطق بالقوة**: وهو الذي يذكر معه لفظ الجذر مرة واحدة ، ولأن مربعه هو المنطق به: كجذر خمسة ، فإن مربع جذره:/ خمسة ، وسمي منطق بالقوة لأن [١ظ] القوي على عدد هو مربعه الناشئ عن ضرب ذلك الجذر في مثله .

ومنه **المُوَسِّط**: وهو كل عدد يذكر معه لفظ الجذر أكثر من مرة ، وسمي موسّطًا لتوسّطه في الرتبة بين المنطق في القوة وبين الخط المركب ، أو لأنه عدد مفرد < كلمة غير واضحة> عن رتبة العدد المركب ، وانحط عن مرتبة العدد المفرد فصار متوسطًا بينهما ، فما كان منه لفظ الجذر مرتين ، فيسمى القوي على منطق في القوة ، لأن مربع مربعه منطق: كجذر جذر خمسة ، وماكان فيه لفظ الجذر ثلاث مرات فأكثر فإن مربعات جذورها تتكرر بعدة تكرار لفظ الجذر فيها ، والله أعلم .

وإمَّا مركب: وهو ما تركب من عددين أصمين ، أو منطق وأصم: كثلاثة وجذر خمسة ، ويُسمَّى هذا المركب: ذو الاسمين ، وسيأتي إيضاح ذلك في موضعه ، إن شاء الله تعالى .

وقد **اصطلح** الجمهور على أن يُجعل على المطلوب جذره جيم مقطوعة هكذا: ﺟـ ، ليعلم أن المطلوب من هذا العدد جذره ، وعلى أن يكرروها بحسب تكرار لفظ

الجذر ، ليحفظوا بذلك مراتب الجذر ، فإذا أرادوا جذر خمسة كتبوا هكذا:

جـ
٥ ،

وإذا أرادوا جذر جذر خمسة كتبوها هكذا:

جـ
جـ
٥

وهلم جرا .

وأقول: إنَّ الجيم إذا تكررت فالأحسن[1] أن توصل: كجذر جذر خمسة هكذا:

ججـ
٥

[٢و] وإن أرادوا أن يكتبوا ثلاثة وجذر خمسة مأخوذًا جذرهما / كتبوهما على هذه الصورة هكذا:

جـ
جـ
٣ ٥

وسيتضح ذلك فيما بعد إن شاء الله تعالى ، والله أعلم .

❁❁❁

(١) فالأحسن: الاحسن – خ –/.

الفن الأول

في أعمال جذور الأعْدَاد الصُم المفرَدة غير المركبة من تضعيفها وتبعيضها وضربها وجمعها وطرحها وقسمتها ونسبتها وأمثلة ذلك مرتبًا على فصول أربعة



الفصل الأول

في تضعيف جذور الأعداد وتبعيضها

اعلم أن **ضعف جذر كل عدد** هو جذر لأربعة أمثاله ، **ونصف جذر عدد** هو جذر لربع ذلك العدد ، وأن جذر كل عدد لا يكون جذرًا لغير ذلك العدد ، ويجوز أن يكون أضعافًا أو أبعاضًا لغيره .

وأن ترد الجذور إذا كثرت أو قلت إلى جذر عدد واحد ، ولابد للعددين أن يتساويا في رتبة الجذور أو جذور الجذور .

فإذا أردت تضعيف جذر أو تنصيفه: ربعت عدد التضعيف أو التبعيض ، وضربته بالعدد[1] المفروض ، فجذر الخارج هو المطلوب . هذا إن كان المفروض جذر عدد ، **أما إن كان جذر جذر عدد** ، فإنك تربع المربع الأول مرة أخرى ، وكلما زاد لفظ الجذر تربع أيضًا خارج التربيع السابق عليه/ وهكذا . [٢ظ]

مثاله:

نريد أن **نضعف** جذر خمسة مرة واحدة ، فالعمل في ذلك وما شابهه أن نقول: جذرا خمسة لأي عدد يكون جذرًا؟ فاضرب اثنين - عدد التضعيف- بمثلها[2] ، فيكون خارج التربيع أربعة ، نضربها بالخمسة[3] ، فيكون الحاصل عشرين وجذره المطلوب .

ولو قيل: جذرَا جذر خمسة لأي عدد يكون جذرًا؟ فمربع مربع الاثنين ستة عشر مضروبة بالخمسة[4] ، فيكون الحاصل ثمانين ، وجذر جذره المطلوب .

---

(١) بالعدد: في العدد - خ -/.

(٢) بمثلها: في مثلها - خ -/.

(٣) بالخمسة: في الخمسة - خ - /.

(٤) بالخمسة: في الخمسة - خ - /.

ولو قيل: ثلاثة أجذار[١] خمسة لأي عدد يكون جذرًا؟ فمربع الثلاثة: تسعة، مضروبة في الخمسة بخمسة وأربعين، فجذر خمسة وأربعين ثلاثة أجذار خمسة.

فلو قيل: ثلاثة[٢] أجذار جذر خمسة لأي عدد يكون جذرًا؟ لربعنا الثلاثة مرتين بأحد وثمانين، نضربها بالخمسة[٣] يكون الحاصل أربعمائة وخمسة[٤]، وجذر جذرها هو المطلوب هكذا: جحـ ٤٠٥[٥].

ولو قيل: جذرَا خمسة ونصف جذر خمسة، لأي عدد يكون جذرًا؟ فمربع الاثنين ونصف، ستة وربعًا، وضربها في الخمسة، أحد وثلاثون وربع، وجذرها هو المطلوب، وهذا صورته: جـ ٣١ و $\frac{١}{٤}$.

ولو قيل: جذرَا جذر أربعين، لأي عدد يكون جذرًا ؟ فمربع الاثنين أربعة، ومربع الأربعة ستة عشر مضروبة بأربعين[٦] يكون ذلك أربعين وستمائة، وجذر جذرها هو المطلوب، وصورته هكذا: جحـ ٦٤٠.

[٣و] / **وإذا أردنا التبعيض** مثل أن نقول: نصف جذر خمسة، لأي عدد يكون جذرًا؟ فنربع النصف بربع، ونضربه بخمسة[٧]، والخارج واحد وربع، وجذر ذلك هو نصف جذر خمسة، وهذه صورته: جـ ١ و $\frac{١}{٤}$.

ولو قيل: ثلث جذر عشرة، لأي عدد يكون جذرًا؟ فمربع الثلث تسع، وخارج ضربه بعشرة[٨] واحدًا وتسعًا، وجذره المطلوب، هكذا: جـ ١ و $\frac{١}{٩}$.

ولو أردنا جذر جزء عدد لضربنا ذلك العدد بمخرج[٩] الجزء، وأخذنا من جذر الحاصل ذلك الجزء، أعني بقلب المضاف، يحصل المطلوب.

---

(١) ثلاثة أجذار : ثلاث أجدار جذر - خ-/. (٢) ثلاثة: ثلاث - خ - /.

(٣) بالخمسة: في الخمسة - خ - /.

(٤) وخمسة: وخمسين - خ - /.

(٥) جحـ ٤٠٥: جحـ ٤٥٠ - خ - /.

(٦) بأربعين: في أربعين - خ - /.

(٧) بخمسة: في خمسة - خ - /.

(٨) بعشرة: في عشرة -خ- /.

(٩) بمخرج: في مخرج - خ - /.

مثاله: جذر نصف خمسة ، كم هو؟ ضربنا الخمسة باثنين[١] ، الخارج عشرة ، ونصف جذرها هو المطلوب .

وكذا لو قيل: كم جذر ثلث عشرة؟ لضربنا العشرة في ثلاثة بثلاثين ، وثلث جذرها هو المطلوب .

ولو قيل: جذر ربع ستة عشر ، كم هو ؟ لضربنا الستة عشر في أربعة بأربعة وستين ، وربع جذرها اثنان ، وهو المطلوب .

ولو قيل: كم جذر خُمس عشرين؟ لضربنا العشرين في خمسة بمائة ، وأخذنا خُمس جذرها فكان اثنين ، وهو جذر خُمس عشرين ، وعلى هذا فقس ، والله أعلم .

وإذا أردنا أن يكون جذر عدد ، أضعاف جذر لعَدَدٍ آخر أو أبعاضًا من جذر عدد آخر . فطريقه: أن تقسم واحدًا / على عدد الأضعاف أو الأبعاض ، ثم تربع [٣ظ] خارج القسمة ، وتضرب حاصل التربيع في المفروض ، يحصل المطلوب .

مثاله: جذر عشرين ، لأي عدد يكون جذرين؟ قسمنا الواحد على الاثنين – عدد الأجذار – يكون نصفًا ، ومربعه ربعًا ، ضربناه في العشرين يكون خمسة ، وجذرها هو المطلوب . وهو مقام قولك: نصف جذر عشرين لأي عدد يكون جذرًا؟ .

ولو قيل: جذر عشرة ، لأي عدد يكون نصفًا؟ قسمنا الواحد على النصف الخارج: اثنان ، ومربعهما أربعة ، ضربناها في العشرة ، حصل أربعين ، وجذرها المطلوب . وهو بمثابة قولك: جذرَا عشرة لأي عدد يكون جذرًا؟ .

ولو قيل: جذر عشرة ، لأي عدد يكون ثلاثة أثمان جذره؟ فالخارج من قسمة الواحد على ثلاثة أثمان : اثنان وثلثان ، ومربعه سبعة وتسعًا ، مضروب ذلك في العشرة يكون واحد وسبعين[٢] وتسعًا ، هكذا: ٧١ و $\frac{١}{٩}$ [٣] وثلاثة أثمان هذا الجذر مساو لجذر عشرة .

---

(١) باثنين: في اثنين – خ – /.

(٢) واحد وسبعين: سبعين – خ – /.

(٣) ٧١ و $\frac{١}{٩}$: ٧٠ و $\frac{١}{٩}$ – خ – /.

فإن قيل: جذرا ثلاثة أجذار أربعين ، لأي عدد يكون جذرًا؟ فتستخرج أولاً: ثلاثة أجذار أربعين ، لأي عدد يكون جذرًا؟ كما عرفت يكون لجذر ثلثمائة وستين ، ثم تقول: جذرا جذر ثلثمائة وستين لأي عدد يكون جذرا؟ فافعل كما علمت ، بأن تربع الاثنين تربيعين بستة عشر ، وتضرب ذلك في ثلثمائة وستين ، / [٤و] يكن الحاصل هو المطلوب ، وذلك جذر جذر خمسة آلاف وسبعمائة وستين ، على هذه الصورة: ٥٧٦٠ ، والله أعلم .

تنبيه:

اعلم أن تربيع جذر عدد ، هو أن تسقط لفظ الجذر منه ، أو ترفع الجيم عن ذلك العدد مرة أو مرات بحسب تكرار التربيع ، أو قيل: خذ جذره ، فزيادة لفظ جذر أو إيقاع جيم أخرى على ذلك العدد .

مثاله: جذر خمسة هكذا: ٥ ، إذا ربعته رفعت عنه الجيم فصار هكذا: ٥، أعني عددًا مطلقًا بغير لفظ الجذر . وأيضًا إذا ربعت هذا العدد ٥ ، وهو جذر جذر خمسة ، أسقطت منه لفظ الجذر مرة واحدة ، أو رُفعت عنه جيم واحدة فيصير هكذا: ٥ ، أعني: جذر خمسة ، فإن ربعته ثانيًا ارتفعت عنه الجيم الأخرى فصار: ٥، عددًا مطلقًا خاليًا(١) عن لفظ الجذر ، والله تعالى أعلم بالصواب .

وحيثما قلنا: اضرب أو اقسم مربع جذر كذا ، فالمراد تجريد العدد عن لفظ الجذر ، **أو قلنا:** خذ جذر < جذر> خمسة ، فالمراد إيقاع جيم أخرى ، فيصير جذر جذر خمسة ، ولسهولة الأعمال في تربيع المفردات وأخذ جذورها ، لم نجعل لهما فصلاً ، وأما تربيع المركبات وأخذ جذورها ، فسيأتي في الفن الثاني في العمل بذوات الأسماء والمنفصلات .

۞۞۞

---

(٤) ٢٠- خالياً: خال - خ - /.

[٤ظ]

الفصل الثاني

في ضرب الجذور بعضها ببعض[1] وفي المنطقة

وطريقه: أن تضرب مربع أحد المضروبين في مربع جذر الآخر، أعني: أن ترفع الجيم عن كل منهما، فيصيرا مجردين عن لفظ الجذر أو مربع المربع في مربع المربع، إن كان لكل منهما جيمين فترفعهما ليتجردا كما عرفت، ثم تضرب أحد العددين المجردين في الآخر، وخارج الضرب جذره أو جذر جذره هو المطلوب، فأوقع على الخارج جيمًا أو جيمين كما عرفت.

واعلم أن مربع جذر العدد هو المضاف إليه لفظ الجذر مرة واحدة، ومربع مربع الجذر هو المضاف إليه لفظ الجذر مرتين وهكذا، ولا يجوز ضرب عدد في جذر عدد ولا عكسه لعدم التساوي في الرتبة، فإذا ورد مثل ذلك فصَيّر ذلك العدد جذرًا لعدد بأن تربعه، وحاصل التربيع توقع عليه الجيم، وكذا تفعل في الإضعاف والإبعاض إذا كان العدد في أحد المضروبين أو كلاهما، وكذا إذا كان أحد المضروبين جذر عدد، والآخر جذر جذر عدد، فإنك تربع العدد المضاف إليه لفظ الجذر مرة[2] أخرى، وخارج التربيع توقع عليه جيمًا[3] أخرى ليتساويا في مرتبة الجذر، / ويصير ذلك كضرب جذر جذر عدد في جذر جذر عدد، [٥و] وكل ذلك تقدم بيانه.

فإن قيل: اضرب خمسة في جذر سبعة، فإنك تربع الخمسة بخمسة وعشرين، فقد صيرّتهما جذرًا لعدد فتساويا في الرتبة، فكأن القائل يقول: اضرب جذر خمسة وعشرين في جذر سبعة، فعند ذلك تجرد كل منهما عن لفظ الجذر،

---

(١) ببعض: في بعض - خ - /.

(٢) - مرة: مكررة - خ - /.

(٣) - جيماً: جيم - خ - /.

وتضرب خمسة وعشرين في سبعة بمائة وخمسة وسبعين[١]، ثم توقع على الخارج لفظ الجذر مرة واحدة، فيكون الجواب جذر مائة وخمسة وسبعين هكذا: ١٧٥.

ولو قيل: اضرب جذر خمسة في جذر سبعة، فجرد لفظ الجذر عنهما بتربيع كل منهما، واضرب خمسة في سبعة بخمسة وثلاثين، وضف إلى الخارج من الضرب لفظ الجذر مرة واحدة، فيكون الجواب جذر خمسة وثلاثين هكذا: ٣٥.

ولو قيل: جذر ثلاثة في جذر اثني عشر، لكان الجواب جذر ستة وثلاثين هكذا: ٣٦، لأن ضلعيها جذر ثلاثة وجذر اثني عشر.

ولو قيل: اضرب جذر عشرة في جذر ستة، لكان خارج الضرب جذر ستين هكذا: ٦٠.

ولو قيل: اضرب العدد ثمانية[٢] في جذر عشرة، فقد تقدم أنه لايجوز ضرب عدد في جذر عدد، فلا بد من / جعل الثمانية جذر العدد، وذلك بأن تربعها [٥ظ] وتوقع على مربعها الجذر، هكذا تكون: ٦٤ ثم تضرب جذر أربعة وستين في جذر عشرة الخارج ستمائة وأربعون، وجذرها هو المطلوب هكذا: ٦٤٠.

ولو قيل: اضرب ثلاثة أجذار ستة في خمسة أجذار عشرة، فاجعل ثلاثة أجذار ستة جذر عدد واحد، وكذا جذر خمسة أجذار عشرة كما تقدم، فتصير أجذار أربعة وخمسين وجذر مائتين وخمسين هكذا: ٥٤ و ٢٥٠، ثم اضرب أحدهما في الآخر يكون الخارج ثلاثة عشر ألف وخمسمائة[٣]، وجذره هو المطلوب هكذا ١٣٥٠٠[٤].

ولو قيل: اضرب جذر سبعة في ثلاثة أرباع جذر اثنين وثلاثين، فاعمل كما

---

(١) - وخمسة: خمسة - خ -/.

(٢) العدد ثمانية: ثمانية عدد - خ -/.

(٣) - وخمسمائة: وستماية - خ -/.

(٤) ١٣٥٠٠ : ١٣٦٠٠ خ -/.

عرفت ، بأن تربع الثلاثة أرباع ، تكن أربعة أثمان ونصف الثمن[١] ، وتضرب ذلك في اثنين وثلاثين ، يكون جذر ثمانية عشر ، فاضرب الثمانية عشر في سبعة تكن ستة وعشرين ومائة ، وجذر ذلك هو المطلوب ، وهذا صورة ذلك: ح ١٢٦.

ولو قيل: اضرب ثلاثة أرباع جذر اثنين وثلاثين في ثلاثة أجذار عشرة ، فقد علمت أن ثلاثة أرباع جذر اثنين وثلاثين/ جذر ثمانية عشر ، وثلاثة أجذار عشرة [٦و] هو جذر تسعين ، فإذًا تضرب تسعين في ثمانية عشر ، الخارج يكون ألف وستمائة وعشرين[٢] ، وجذرها هو المطلوب ، هكذا: ح ١٦٢٠ [٣].

ولو قيل: اضرب ثلاثة أجذار سبعة في ربع جذر عشرين ، فاعمل كما تقدم ، يكن خارج الضرب ثمانية وسبعين وثلاثة أرباع ، وجذر ذلك هو المطلوب ، وهذا صورته: ح ٧٨ و $\frac{٣}{٤}$.

ولو قيل: اضرب جذر جذر خمسة في جذر جذر عشرة ، فاضرب خمسة في عشرة بخمسين ، وأوقع عليها جيمين ، فيكون خارج الضرب على هذه الصورة: ححـ ٥٠.

وكذا لو قيل: اضرب جذر جذر ثلاثة في جذر جذر خمسة ، لكان الجواب جذر جذر خمسة عشر ، هكذا: ححـ ١٥ .

فلو قيل: اضرب جذر عشرة في جذر جذر خمسة ، فربع العشرة مرة أخرى لتُساوي في الرتبة جذر جذر خمسة ، تصر[٤] جذر جذر مائة ، ثم اضرب المائة في خمسة بخمسمائة ، فأوقع عليها جيمين ، يصر[٥] خارج الضرب جذر جذر خمسمائة ، هكذا: ححـ ٥٠٠ .

---

(١) الثمن: ثمن - خ - /.

(٢) - ألف وستمائة وعشرين :ماية واثنين وستين - خ - / .

(٣) ح ١٦٢٠ : ح ١٢٦ خ - /.

(٤) تصر: تصير - خ - /.

(٥) - يصر: يصير - خ - /.

ولو قيل: اضرب جذر جذر خمسة في جذري جذر عشرة ، فاعمل ذلك كما عرفت ، يكن حاصل الضرب جذر جذر ثمانمائة ، هكذا: ٨٠٠ .

[٦ظ] **ولو قيل:** اضرب جذر جذر اثنين في نصف جذر جذر اثنين وثلاثين ، / فقد علمت أن نصف جذر جذر اثنين وثلاثين جذر جذر اثنين ، **فكأنه قيل:** اضرب جذر جذر اثنين في جذر جذر اثنين ، فيكون الخارج من الضرب جذر جذر أربعة ، هكذا: ٤ .

ولو قيل: اضرب نصف جذر جذر ثمانية في ثلث جذر جذر تسعين ، فقد علمت أن نصف جذر جذر ثمانية جذر < جذر> نصف ، وثلث جذر جذر تسعين هو جذر جذر واحد وتسع ، فكأنه قيل: اضرب جذر جذر نصف في جذر جذر واحد وتسع ، يكن الجواب: جذر جذر خمسة أتساع ، هكذا: $\frac{٥}{٩}$.

ولو قيل: اضرب نصف جذر جذر اثني عشر في ربع جذر جذر اثنين وثلاثين ، فاعمل كما عرفت بأن تربع النصف بربع ، ثم تربع الربع بنصف ثمن ، ثم تضربه في الاثني عشر ، يكن ثلاثة أرباع فأحفظه ، ثم تربع الربع المفروض يكن نصف ثمن ، ثم تربع نصف الثمن ، يكن بربع ثمن ثمن ، ثم تضربه بالاثنين(١) وثلاثين يكن ثُمُنًا ، **فكأنه قيل:** اضرب جذر جذر ثلاثة أرباع في جذر جذر ثمن ، فاضرب ثلاثة الأرباع المحفوظة في الثمن ، يكن خارج الضرب ثلاثة أرباع ثمن ، وجذر جذرها هو المطلوب ، وهذا صورته: $\frac{٣}{٤}\ \frac{٠}{٨}$.

واعلم: إن اختبار **صحة الضرب** بقسمة خارج الضرب على أحد المضروبين ، [٧و] فإن خرج / المضروب الآخر صح وإلا فلا ، والله أعلم .

۞۞۞

(١) بالاثنين: في الاثنين - خ - /.

الفصل الثالث

في الجمع والطرح

اعلم أنه لايقع بين جذر عدد وجذر عدد وبين موسطين متحدي الرتبة جمع ولاطرح إلا إذا كان بينهما اشتراك، ومتى لم يكن بينهما اشتراك فالجمع أو الطرح بواو العطف أو بحرف الاستثناء، ويكون ذلك من قبيل ذوات الأسماء، وسيأتي أعمالها.

ولمعرفة الاشتراك قانونان:

الأول: أن تضرب أحدهما في الآخر فالخارج إن كان له جذر منطق فبينهما اشتراك، وكذا في الموسطات إن كان خارج الضرب جذر جذر منطق فبينهما اشتراك وإلا فلا.

الثاني: أن تقسم أحدهما على الآخر، فإن كان لخارج القسمة جذرًا، أو جذر جذر وأكثر من ذلك بحسب مراتب الموسطات، فالاشتراك بينهما وإلا فلا.

وإذا علم أن بينهما اشتراك، أمكن جمعهما حتى يصيرا جذر عدد واحد، وأمكن طرح الأقل من الأكثر حتى يكون الباقي جذر عدد واحد، ولا يكون من ذوات الأسماء، ويلزم من هذين القانونين أن النسبة بين جزءين قام منهما أحد العددين كالنسبة بين مضروبين قام منهما العدد الآخر.

مثاله:

ثمانية وثمانية عشر هذان العددان بينهما اشتراك/ لأن كل واحد منهما قام من [٧ظ] عددين بينهما نسبة النصف، أعني أن الثمانية قامت من ضرب اثنين في أربعة، والثمانية عشر قامت من ضرب ثلاثة في ستة، ومعلوم أن الاثنين من الأربعة: نصف، والثلاثة من الستة: نصف.

وكذلك ثلاثة واثنا عشر، فإن الثلاثة قامت من ضرب الواحد في الثلاثة، والواحد من الثلاثة: ثلث، والاثنا عشر قامت من ضرب اثنين في ستة، والاثنين من الستة أيضًا: ثلث، فهي نسبة الثلث، وعلى هذا القياس يقاس ما أشبه ذلك، والله أعلم.

والطريق إلى[١] **معرفة ذلك** أن تأخذ ضعف جذر مسطحهما، فإن زدته على مجموعهما، فجذر ذلك هو مجموع العددين، وإن نقصته من مجموعهما فجذر الباقي هو المطلوب.

وإن شئت فاضرب مسطح العددين في أربعة أبدًا، وزد جذر الحاصل على مجموعهما، أو أنقصه، فجذر المجموع أو الباقي هو المطلوب.

وإن شئت فاجمع المربعين إلى ضعف المتوسط بينهما في الجمع، واطرحه من مجموع المربعين في الطرح، فما اجتمع أو بقي فجذره المطلوب.

وإن شئت فاقسم أحدهما على الآخر، وزد على جذر الخارج واحدًا أبدًا، واضرب مربعه[٢] في المقسوم عليه، فجذر الخارج هو المطلوب من الجمع.

وفي الطرح اضرب < مربع> الفضل - بين الواحد وجذر الخارج - في المقسوم عليه، / وجذر الخارج هو المطلوب من طرح الأقل من الأكثر، والله أعلم. [٨و]

وأما طريق معرفة الجمع والطرح لجذور جذور الأعداد وتسمى الموسطات، فهو أن تجمعهما أولاً بجمع الجذور كما تقدم، وذلك بأن تزيد[٣] ضعف جذر مسطحهما على مجموعهما وسمه بالمحفوظ الأول، ثم اضرب جذر مسطحهما في أربعة أبدًا فهو المحفوظ الثاني، فاجمع المحفوظين أيضًا بجمع الجذور كما علمت بأن تزيد[٤] ضعف جذر مسطحهما على مجموعهما أو تطرحه، فجذر الحاصل أو الباقي هو المطلوب.

---

(١) إلى: في - خ -/.
(٢) واضرب مربعه: واضربه - خ -/.
(٣) تزيد: تزد - خ -/.
(٤) تزيد: تزد - خ -/.

وإن شئت ضربت جذر مسطح العددين في اثنين يكون المحفوظ الأول، وفي أربعة يكون المحفوظ الثاني، ثم اجمع المحفوظين أيضًا كما عرفت، أعني أن تزيد[١] ضعف جذر مسطحهما على مجموعهما أو تنقصه، فجذر الحاصل أو الباقي هو المطلوب.

وإن شئت فاقسم أكبر العددين على أصغرهما، وزد[٢] على جذر جذر الخارج واحدًا أبدًا إن أردت الجمع، أو طرح[٣] واحد من جذر جذر الخارج إن أردت الطرح، فما اجتمع أو بقي اضرب < مربع> مربعه في المقسوم عليه، أعني أصغر العددين، فما كان فجذر جذره هو المطلوب والله أعلم.

تنبيه:

إن قيل ما <حا >لة ضعف الجذر في الجمع والطرح، قلنا لأنه القياس من طريق / البرهان العددي، ولأن التصرف في الأعداد المنطقة كالتصرف في مربعات [٨ظ] الجذور، فإنه قد علم من كتاب **الأصول**: إن ضرب العدد في مثله كمربعي قسميه ومسطح أحدهما في الثاني مرتين، فهذا الأصل يقاس عليه أعمال مربعات الجذور من جمعها وطرحها، فيعلم جذر مجموع جذري عددين أو جذر الفضل بينهما، وذلك بأن تقيم[٤] جذر كل عدد مقام قسم وتربعه، وتحفظ مجموع المربعين، ثم تسطح القسمين مرتين، وفي كل مرة تأخذ جذره، فمجموع الجذرين تحفظ جذره، ثم تجمع المحفوظين إن أردنا الجمع، أو تأخذ الفضل بينهما إن أردنا طرح الأقل من الأكثر، فيكون جذر المجموع أو الباقي هو المطلوب، والله أعلم.

أمثلة ذلك:

لو قيل: اجمع جذر اثنين إلى جذر ثمانية عشر، هذان العددان بينهما اشتراك لأن مسطحهما وهو ستة وثلاثون، له جذر منطق وهو ستة، وكذلك خارج

---

(١) تزيد: تزد - خ - /.
(٢) وزد: وتزد - خ - /.
(٣) - طرح: أطرح - خ - /.
(٤) بان: بانا - خ - /.

قسمة أكبر العددين على أصغرهما، وهو تسعة وجذره ثلاثة، وكذلك خارج قسمة أصغر العددين على أكبرهما، وهو تسع وجذره ثلث، فعلى هذا يمكن أن يجتمعا حتى يصيرا[١] جذر عدد واحد، ويمكن إسقاط أصغرهما من أكبرهما حتى يصيرا[٢] / جذر عدد واحد، ففي هذه الصورة **بالطريقة**[٣] **الأولى** مجموع العددين عشرون، ومسطحهما ستة وثلاثون، جذره ستة، ضعفّه أو اضربه في اثنين: اثنا عشر، يزاد على مجموع العددين يبلغ مجموعهما اثنان وثلاثون، وجذر ذلك هو المطلوب، أعني مجموع الجذرين. [٩و]

وإن **أردت طرح** أقلهما من أكثرهما فاسقط الضعف من مجموع العددين، فيكون الباقي جذر ثمانية، وهو المطلوب.

وبالطريق الثاني أن يقسم الأكبر على الأصغر الخارج تسعة، وجذره ثلاثة، زدنا عليه واحدًا فصار المبلغ أربعة ومربعه ستة عشر مضروبًا في المقسوم عليه - وهو الأصغر - يحصل اثنان وثلاثون، وجذره هو المطلوب.

وفي الطرح أسقطنا من الجذر واحدًا، فصار[٤] الباقي اثنين وخارج ضرب مربعه[٥] في المقسوم عليه هو جذر الباقي، أي جذر ثمانية، وعلى هذا القياس يكون العمل في جمع جذر عدد إلى جذر عدد وإسقاط جذر عدد من جذر عدد.

فلو قيل: اجمع جذر ثلاثة إلى جذر اثني عشر، فمسطحهما ستة وثلاثون، ضعف الجذر اثنا عشر أضفناه[٦] إلى مجموع العدد، وهو خمسة عشر، فكان سبعة وعشرين، وجذره المطلوب، وهذا صورته $\overline{٢٧}$ ح.

[٩ظ] **ولو أردت طرح** جذر ثلاثة من / جذر اثني عشر، فاعمل ما تقدم غير أن ضعف الجذر يُطرح من مجموع العددين، فيكون[٧] الباقي جذر ثلاثة، هكذا: $\overline{٣}$ ح.

(١) يصيرا: يصيران - خ- /.
(٢) يصيرا: يصيران - خ- /.
(٣) بالطريقة: بالطريق - خ - /.
(٤) فصار: صار - خ - /.
(٥) ضرب مربعه: ضربه - خ - /.
(٦) إلى: على - خ- /.
(٧) فيكون: يكون - خ - /.

ولو قيل: اجمع جذر اثنين إلى جذر ثمانية ، فجذر مسطحهما أربعة ، وضعفه ثمانية ، يزاد على مجموعهما ، وهو عشرة ، يحصل في الجمع جذر ثمانية عشر ، هكذا ح١٨ ، وفي الطرح جذر اثنين ، هكذا ح٢.

وإن شئت في الجمع ضربت مسطح العددين وهو ستة عشر ، في أربعة ، يكن الحاصل أربعة وستين ، وجذره ثمانية . فإن زدته على مجموع العددين حصل جذر مجموعهما ، **وإن طرحته** من مجموع العددين حصل جذر الباقي ، وهو كما تقدم .

ولو قيل: اجمع جذري اثنين إلى ثلاثة أجذار ثمانية ، **فكأنه قيل:** اجمع جذر ثمانية إلى جذر اثنين وسبعين ، وذلك لأن جذري اثنين جذر ثمانية ، وثلاثة أجذار ثمانية جذر اثنين وسبعين ، كما عرفت ، فإذا أريد جمعهما يكون الجواب جذر ثمانية وعشرين ومائة ، هكذا ح١٢٨.

وإن أردت طرح أقلهما من أكثرهما ، كان الجواب جذر اثنين وثلاثين ، هكذا ح٣٢.

ولو قيل: اجمع نصف جذر ثمانية إلى ثلاثة أرباع جذر اثنين/ وثلاثين ، فرد [١٠و] كل منهما إلى جذر عدد ، **فكأنه قال:** اجمع جذر اثنين إلى جذر ثمانية عشر ، فيكون الجواب كما تقدم: جذر اثنين وثلاثين ، وفي الطرح جذر ثمانية .

وهكذا تفعل في كل ما[١] يرد عليك مما يكون الاشتراك بينهما ، أما ما لايكون بينهما اشتراك فهو ذو اسمين يجمعان[٢] بواو العطف ، ويطرحان[٣] بحذف الاستثناء ، والأحسن في مثل ذلك أن يكون الجواب بلفظ السؤال .

مثاله: لو قيل: اجمع جذر ستة وجذر عشرة ، فهذان العددان ليس بينهما اشتراك ، والجواب هو: جذر ستة وجذر عشرة .

وإن **أريد الطرح** بقول الباقي: جذر عشرة إلا جذر ستة .

---

(١) كل ما: كلما - خ -/. (٢) يجمعان: يجمعا - خ -/.

(٣) ويطرحان: ويطرحا - خ -/.

ولو جمعتهما بطريق الأعداد المشتركة لكنت تقول في **الجمع** ستة عشر وجذر مائتين وأربعين مأخوذًا جذر ذلك هكذا:

ح
ح
١٦ و ٢٤٠

وفي الطرح تقول ستة عشر إلا جذر مائتين وأربعين مأخوذًا جذر ذلك هكذا:

ح
ح
١٦ لا ٢٤٠

وكذا لو قيل: اجمع جذر خمسة إلى جذر ستة، فالجواب في هذين العددين أيضًا يكون بلفظ السؤال، لأن العددين ليس بينهما اشتراك، فلو جمعتهما بطريق العمل لكنت تقول في **الجمع** أحد عشر وجذر مائة / وعشرين مأخوذًا جذره هكذا: [١٠ظ]

ح
ح
١١ و ١٢٠

وفي الطرح أحد عشر إلا جذر مائة وعشرين مأخوذًا جذره هكذا:

ح
ح
١٦ لا ٢٤٠

والله أعلم.

والمثال في جمع جذور الجذور:

لو قيل: اجمع جذر جذر ثلاثة إلى جذر جذر ثمانية وأربعين.

فبالطريقة الأولى وهي طريقة المحفوظين مجموعهما أحد وخمسون، ومسطحهما مائة وأربعة وأربعون، جذره اثنا عشر، وضعفه - أي ضربه في اثنين - أربعة وعشرون، وكذا لو ضربنا ١٤٤ في ٤ لكان ٥٧٦ وجذره ٢٤، فزدناه على مجموعهما، فكان المحفوظ الأول ح ٧٥، ثم ضربنا الجذر في أربعة، فكان ثمانية وأربعين، وهو المحفوظ الثاني، ومسطح المحفوظين ثلاثة آلاف وستمائة، وجذره: ستون، ضعفه مائة وعشرون، وكذا لو ضربنا مسطح

المحفوظين، وهو ثلاثة آلاف وستمائة في أربعة، لكان جذر الخارج كذلك مائة وعشرين، فزدناه على مجموع المحفوظين وذلك مائة وثلاثة وعشرون، فكان المجتمع ثلاثة وأربعين ومائتين، وجذر جذره المطلوب، هكذا: جحـ ٢٤٣ .

وإن أريد الباقي من الطرح، فإنا نطرح ضعف جذر مسطح / المحفوظين، [١١و] وهو ١٢٣ الباقي جحـ ٣ .

ولو قيل: اجمع جذر جذر ثلاثة إلى جذر جذر ثلاثة وأربعين ومائتين فمجموع العددين ٢٤٦، ومسطحهما ٧٢٩، جذره ٢٧، ضعفه ٥٤، المحفوظ الأول ثلاثمائة، ومضروب الجذر في أربعة أو ضعف ضعفه هو المحفوظ الثاني وهو مائة وثمانية، مسطح المحفوظين اثنان وثلاثون ألفًا وأربعمائة، وجذره مائة وثمانون، ضعفه ٣٦٠، مجموع المحفوظين أربعمائة وثمانية، زدنا عليه ضعف جذر مسطحهما، وهو ثلاثمائة وستون، فكان المجتمع جذر جذر سبعمائة وثمانية وستين، هكذا جحـ ٧٦٨ .

ولو طرحنا جحـ ٧٦٨ **ضعف الجذر** من مجموع المحفوظين، لكان الباقي جذر جذر ثمانية وأربعين، هكذا: جحـ ٤٨ .

ولو أريدت(١) **هذه الصورة** بطريق القسمة، قسمنا الأكبر على الأصغر خارج القسمة أحد وثمانون، أخذنا جذر جذره وهو ثلاثة، زدنا عليه واحدًا، وأخذنا مربع مربعه، وهو ستة وخمسون ومائتان، ضربناه في المقسوم عليه، وهو العدد الأصغر، فكان ثمانية وستين وسبعمائة، وجذر جذره هو مجموعهما، وفي الطرح طرحناه واحدًا، فكان مربع مربع الباقي / ستة عشر ضربناه في أصغر [١١ظ] العددين، وهو المقسوم عليه، فكان ثمانية وأربعين، وجذر جذره هو الباقي من طرح جذر الأصغر من جذر الأكبر على هذه الصورة: جحـ ٤٨ .

ولو قيل: اجمع جذر جذر خمسة إلى جذر جذر أربعمائة وخمسة، جمعناهما

---

(٤) أريدت: اريد - خ - /.

فكان أربعمائة وعشرة ، مسطح العددين ألفان وخمسة وعشرون ، وجذره خمسة وأربعون ، ضعف الجذر تسعون ، يزاد على مجموعهما يحصل المحفوظ الأول وهو خمسمائة ، المحفوظ الثاني: مائة وثمانون ، وهو ضعف ضعف الجذر ، أو هو خارج ضرب الجذر في أربعة ، مسطح المحفوظين: تسعون ألفًا ، جذره ثلاثمائة ، ضعفه ستمائة ، زدنا هذا الضعف على مجموع المحفوظين ، وهو ستمائة وثمانون ، فكان ألفًا[١] ومائتين وثمانين[٢]، وجذر جذره هو المطلوب هكذا: جـ ١٢٨٠ .

وفي الطرح طرحنا ضعف الجذر ، وهو ستمائة ، من مجموع المحفوظين[٣] ، فكان الباقي جذر < جذر> ثمانين ، هكذا: جـ ٨٠ .

ولو قيل: اجمع لنا جذر جذر اثنين إلى جذر جذر مائة واثنين وستين ، لقلنا مجموعهما ، أي مجموع مربعيهما ، أربعة وستين ومائة ، ومسطحهما ٣٢٤ ، جذره ١٨ ، ضعفه ٣٦ ، المحفوظ الأول مائتان ، ثم ضربنا الجذر في أربعة أو أضعفنا ضعفه ، أو جمعنا جذري ثمانية عشر / بجمع الجذور لكان على كل اثنين وسبعين ، [١٢و] وهو المحفوظ الثاني ، ومجموع المحفوظين ٢٧٢ ، ومسطح المحفوظين أربعة عشر ألفًا[٤] وأربعمائة ، وجذره ، ١٢٠ وضعفه ، ٢٤٠ جمعناه إلى مجموع المحفوظين ، فكان المطلوب ، وهو جذر جذر خمسمائة واثني عشر هكذا: جـ ٥١٢ ، ويكون الباقي إذا طرحنا الأصغر من الأكبر جذر جذر اثنين وثلاثين هكذا: جـ ٣٢ .

ولو قيل: اجمع جذر جذر ثمانية إلى جذر جذر نصف ، قسمنا الثمانية على النصف يخرج ستة عشر ، وجذر جذره اثنان ، حملنا عليها واحدًا ، وربعنا مربعهما فكان واحدًا وثمانين ، ضربناها في النصف فيكون[٥] أربعين ونصفًا ، وجذر جذرها هو المطلوب هكذا:

جـ ٤٠ و $\frac{1}{2}$

---

(١) – ألفاً: ألف – خ – /.

(٢) وثمانين: وثمانون – خ– /.

(٣) المحفوظين: المحفوظ – خ – /.

(٤) ألفاً: ألف – خ– /.

(٥) فيكون: يكون – خ – /.

وإن شئت قسمنا النصف على الثمانية يكن < الناتج > نصف ثمن، وجذر جذره نصف حملنا عليه واحدًا: <واحدًا> ونصفًا، ومربع مربعه خمسة ونصف ثمن، ثم ضربناه في الثمانية فكان أربعين ونصفًا، وجذر جذره هو المطلوب، وجواب الطرح جذر جذر نصف.

ولو قيل: اجمع جذري[١] جذر اثنين وثلاثين إلى نصف جذر جذر اثنين، فزد كلا منهما إلى جذر عدد كما عرفت تصر[٢] كقول القائل / اجمع لنا جذر جذر [١٢ظ] خمسمائة واثني عشر إلى جذر ثمن، فتفعل كما تقدم، يكن مجموعهما خمسمائة واثني عشر وثمن، و مسطحهما أربعة وستون، وجذريه$\overline{١٦}$، والمحفوظ الأول ٥٢٨ و $\frac{١}{٨}$، والمحفوظ الثاني $\overline{٣٢}$، مسطح المحفوظين $\overline{١٦٩٠٠}$، مجموع جذريه $\overline{٢٦٠}$، يزاد على مجموع المحفوظين، وهو خمسمائة وستون وثمن، يكن الجواب في الجمع: جذر جذر ثمانمائة وعشرين وثمنًا، وفي الطرح: يبقى جذر جذر ثلاثمائة وثمن، والله أعلم.

وإن ورد عليك عددان ليس بينهما اشتراك، فاعلم أنهما من ذوات الأسماء، وعمل ذلك يُطلب من الفن الثاني.

ومثاله: إذا قيل لك: اجمع لنا جذر جذر عشرين إلى جذر < جذر> اثنين، فإذا قسمنا العشرين على الاثنين، كان الخارج عشرة، وهو عدد غير مربع، والجواب هنا كالسؤال.

وإلا فهو ذو ثلاثة أسماء، لأنَّا إذا حملنا على جذر جذر العشرة واحدًا[٣]، وربعت ذلك، يكون[٤] جذر عشرة وواحدًا وجذر جذر مئة وستين[٥]، فاضرب ذلك في جذر الاثنين، يكن جذر عشرين وجذر اثنين وجذر جذر ستمائة وأربعين[٦] / مأخوذًا جذر ذلك كله، وصورته هكذا: [١٣و]

---

(١) جذري: جذر- خ -/.

(٢) تصر: تصير - خ -/.

(٣) واحداً: واحد - خ -/.

(٤) يكون: يكن - خ -/.

(٥) مئة وستين: أربعين - خ -/.

(٦) ستمائة وأربعين: مائة وستين - خ -/.

٢٠ و ٢ و ٦٤٠ [1]

والجواب الأول أخصر.

تنبيه:

اعلم أن **اختبار الجمع** بطرح أحد المجموعين من الحاصل، فإن بقي المجموع الأول صح الجمع وإلا فلا.

واختبار الطرح بجمع الباقي إلى المطروح فيكون المطروح منه، أو تطرحه من المطروح منه فيبقى[2] المطروح، والله أعلم.

۞۞۞

(١) ٦٤٠ : ١٦٠ -خ- /.

(٢) فيبقى: يبقى - خ - /.

الفصل الرابع

في القسمة والتسمية للجذور أو لجذور الجذور

اعلم أعاننا الله وإياك على طاعته ،أن القسمة هي ضد الضرب لأنها تحليل ، والضرب تركيب .

والطريق في ذلك: أن تقسم مربع جذر المقسوم على مربع جذر المقسوم عليه ، أعني تجرد المقسومين عن لفظ الجذر ، فإن كان المقسوم أقل من المقسوم عليه فتسمي المقسوم من المقسوم عليه ، ثم تعيد إلى خارج القسمة لفظ الجذر الذي جردته عنه . ويشترط أيضًا في القسمة التساوي في رتبة الجذور ، فإن تخالفا أو كان الجذر فيهما أو في أحدهما أضعافًا أو أبعاضًا فاردد ذلك إلى أن يصير جذر عدد بحيث تتساوى رتبة كل من المقسومين ، وكمل العمل . وكل ذلك ظاهر مما تقدم ، والله أعلم .

أمثلة: قسمة جذر عدد على جذر عدد:

إذا قيل: اقسم لنا / جذر ستة على جذر ثلاثة ، فاقسم الستة على الثلاثة [١٣ظ] الخارج اثنان ، فأوقع عليه الجذر هكذا: جـ ٢ ، فيكون خارج القسمة جذر اثنين .

ولو كان العكس لكان الخارج جذر نصف هكذا: جـ ١/٢ .

ولو قيل: اقسم جذري ثلاثة على جذر خمسة ، فاردد جذري ثلاثة < إلى> جذر عدد ، بأن تقول جذرًا ثلاثة لأي عدد يكون جذرًا؟ فربع الاثنين بأربعة ، واضربها في ثلاثة يكن المطلوب جذر اثني عشر ، ثم اقسم اثني عشر على خمسة ، يكن خارج القسمة جذر اثنين وخُمسين[١] هكذا:

---

(١) وخُمسين: ونصف - خ - /.

$$\sqrt{٢ \text{ و } \frac{٢}{٥}}$$ (١)

ولو أريد **عكسه** لكان جذر سدسين ونصف سدس هكذا:

$$\sqrt{\frac{٢ \quad ١}{٦ \quad ٢}}$$

ولو **قيل**: اقسم اثنين على جذر ثلاثة، فاجعل الاثنين جذر عدد، بأن تربع الاثنين بأربعة، واقسم الأربعة على الثلاثة، يكن خارج القسمة جذر واحد وثلث هكذا:

$$\sqrt{١ \text{ و } \frac{١}{٣}}$$

ولو **عكس** لكان جذر ثلاثة أرباع هكذا: $\sqrt{\frac{٣}{٤}}$

ولو **قيل**: اقسم جذري ثلاثة على ثلاثة أرباع جذر خمسة، فاردد كلا منهما من الأضعاف والأبعاض إلى جذر عدد، ثم اقسم، **فكأنه قيل**: اقسم جذر اثني [١٤و] عشر على جذر اثنين وستة أثمان ونصف ثمن، فيكون خارج القسمة جذر / أربعة وخمس وثلث خمس هكذا:

$$\sqrt{٤ \text{ و } \frac{١ \quad ١}{٥ \quad ٣}}$$ (٢)

ولو **عكس** لكان الجواب جذر ثمن وسبعة أثمان ثمن هكذا: $\sqrt{\frac{١ \quad ٧}{٨ \quad ٨}}$

وكذا العمل في قسمة جذور الجذور على جذور الجذور:

فلو قيل: اقسم جذر جذر عشرة على جذر جذر ثلاثة، فاقسم العشرة على الثلاثة، ووقع جذر الجذر على الخارج، فيكون الجواب: جذر جذر ثلاثة وثلث هكذا:

$$\sqrt{\sqrt{٣ \text{ و } \frac{١}{٣}}}$$

---

(١) $\sqrt{٢ \text{ و } \frac{٢}{٥}}$: $\sqrt{٢ \text{ و } \frac{١}{٢}}$ خ - ./

(٢) $\sqrt{٤ \text{ و } \frac{١ \quad ١}{٥ \quad ٣}}$: $\sqrt{٤ \text{ و } \frac{٠ \quad ١}{٥ \quad ٣}}$ خ - ./

ولو أريد عكسه: لكان الجواب: جذر جذر ثلاثة أعشار هكذا: $\overline{\frac{٣}{١٠}}$ححـ

ولو قيل: اقسم جذر جذر اثنين وثلاثين على اثنين ، فاجعل للاثنين جذر جذر عدد ، فتجده ستة عشر ، فيكون الخارج من القسمة جذر جذر اثنين هكذا: $\overline{٢}$ححـ

ولو عكس ، لكان جوابه: جذر جذر نصف هكذا: $\overline{\frac{١}{٢}}$ححـ

ولو قيل: اقسم جذري جذر عشرة على جذري جذر خمسة ، فاردد كلاً[1] حتى يصير جذر جذر عدد ، **فكأنه قيل**: اقسم جذر جذر مائة وستين على جذر جذر ثمانين < فيكون الخارج من القسمة جذر جذر اثنين هكذا: $\overline{٢}$ححـ ، **ولو عكس** > فالجواب جذر جذر نصف هكذا: $\overline{\frac{١}{٢}}$ححـ

ولو قيل: اقسم ثلاثة أجذار خمسة على ثلثي جذر جذر اثنين ، **فكأنه قيل**: اقسم جذر جذر ألفين وخمسة وعشرين على جذر جذر ثلث وخمسة أتساع تسع فالجواب: جذر جذر خمسة آلاف ومائة / وخمسة وعشرين وثلاثة أرباع وربع [١٤ظ] ثمن ، هكذا:

$$\overline{٥١٢٥ \text{ و } \frac{٣}{٤} \text{ و } \frac{٠ \quad ١}{٨ \quad ٤}}\text{ححـ}$$

ولو عكس لكان الجواب: جذر جذر تسع تسع تسع تسع وخمس تسع تسع تسع تسع وخمسي خمس تسع تسع تسع تسع هكذا:

$$\overline{\frac{٠ \quad ٠ \quad ٠ \quad ١ \quad ١ \quad ٢}{٩ \quad ٩ \quad ٩ \quad ٩ \quad ٥ \quad ٥}}\text{ححـ}$$

ولو قيل: اقسم جذر جذر اثنين على جذر جذر جذر جذر خمسة ، فيصير[2]

---

(١) كلاً: كل - خ - /. (٢) - فيصير: فصير - خ - /.

جذر جذر اثنين مساويًا[١] لجذر عدد يساوي رتبة المقسوم عليه ، بأن تربع الاثنين ثم تربع مربعها ، فيكون جذر جذر جذر جذر ستة عشر ، ثم اقسم يكن الجواب: جذر جذر جذر جذر ثلاثة وخمس هكذا:

٣ و $\frac{١}{٥}$

ولو **عكس** لكان الجواب: جذر جذر جذر جذر[٢] ربع ونصف ثمن هكذا:

$\frac{١}{٤}$ و $\frac{٠}{٨}$ $\frac{١}{٢}$

واعلم أن اختبار القسمة بالضرب ، أعني أن تضرب الخارج من القسمة أو التسمية في المقسوم عليه أو المسمى منه ، فإن ظهر المقسوم أو المسمى صح وإلا فلا . والله أعلم بالصواب .



(١) -مساوياً: مساو - خ - /.

(٢) جذر: ر جدر - خ - /.

الفن الثاني
في أعمال المركبات

وهي المعبر عنها بذوات الأسماء والمنفصلات من تعريفها وعددها وما به تتميز المتصلات من منفصلاتها وما به تتميز/ الثلاثة الأوائل من الثلاثة التوالي وصورها [١٥و] وإيجادها وضربها وقسمتها وتجذيرها وامتحانها وردها مستوفيًا ذلك، إن شاء الله تعالى في مقدمة وخمسة فصول.



المقدمة

اعلم أن جملة الخطوط المذكورة في هذا التأليف سبعة وعشرون خطًا، منها ثلاثة مفردة وهي: المنطق في الطول، والمنطق في القوة، والموسّط، وقد تقدم الكلام عليها، وأربعة وعشرون مركبة يأتي الكلام عليها منها: ستة ذوات أسماء وستة جذورها، وستة منفصلاتها وستة جذورها.

ومعنى **ذوات الأسماء** لغةً: أما نفس الأسماء كذات الشيء ونفسه وعينه ومفرده: ذات، وأما أصحابها فذوات جمع: ذي، وهو بمعنى صاحب، أعني الأعداد أصحاب الأسماء، واصطلاحًا جذرًا عددين متباينين مجموعين[1] بالواو، أو عدد وجذر عددٍ كذلك، و**المنفصلات**: جمع منفصل: وهو ذو اسمين استثنى أصغرهما من أكبرهما بحرف إلا، واللام فيها عوض عن الضمير المضاف إليه، أعني ومنفصلاتها وسميت بذلك لبقاء كل قسم على اسمه، وعدد أنواعها ستة منها: ثلاثة تسمى الأوائل وثلاثة تسمى التوالي ومنفصلاتها كذلك، / وذلك إما أن [١٥ظ] يكون أحد قسميه منطقًا أو لا، والأول إما أن يكون المنطق هو الأكبر أو بالعكس فهذه ثلاثة أقسام، وكل منهما إما أن يكون مربع الأكبر يزيد على مربع الأصغر بمربع يكون من ضلع مشارك للأكبر أو مباين له فتمت الستة.

فالأول: منها يكون أعظم قسميه منطقًا مع المشاركة.

الثاني: أن يكون الأصغر منطقًا مع المشاركة.

الثالث: أن يكونا أصمين مع المشاركة.

الرابع: أن يكون الأعظم منطقًا مع المباينة.

الخامس: أن يكون الأصغر منطقًا مع المباينة.

---

(١) متباينين مجموعين: متباينان مجموعان – خ – /.

السادس : أن يكونا أصمين مع المباينة .

وعلة هذا الترتيب أنهم قدموا الأقوى فالأقوى ، فالمشاركة أفضل من المباينة ، والمنطق أفضل من الأصم ، والذي منطقه أطول أفضل ، فذو الاسمين : **الأول** جَمَع وحوت[١] الفضل - أعني المشاركة - وعظم[٢] المنطق ولذلك قدموه ، **والثاني** فيه فضيلتان المنطق والمشاركة ، **والثالث** فيه المشاركة فقط ، **والرابع** فيه المنطق وكونه أعظم ، **والخامس** فيه المنطق وحده ، **والسادس** لايشتمل على فضيلة ، فلذلك كان آخرًا ، والله أعلم .

[١٦و] **والذي** تتميز به المتصلات/ من منفصلاتها فبحرفي العطف والاستثناء ، أعني بالواو في المتصلة ، وَ إلاّ في المنفصلة ، والمستثنى لايكون أبدًا إلا أقل من المستثنى منه .

والذي يتميز به الأوائل عن التوالي هو أن أكبر الاسمين إن شارك جذر الفضل بين مربعيهما فمن الأوائل ، وإلا فمن التوالي .

وأيضًا إذا ضرب الفضل بين مربعيهما في أكبرهما ، فإن خرج مربع فمن الأوائل وإلا فمن التوالي .

واعلم أن أكبر الاسمين في الأول والرابع يكون منطقًا ، وفي الثاني والخامس بالعكس ، وفي الثالث والسادس كل منهما أصم ، وكذلك منفصلاتها .

تنبيه :

المراد بالمنطق ما لم يقع عليه لفظ الجذر ، وبالاشتراك ما يشمل التماثل والتداخل والتوافق ، فالمشتركان[٣] يفنيهما الواحد وكل مقدار ، والمتباينان لايفنيهما مقدار أصلاً .

---

(١) وحوت: وحوة (كلمة غير واضحة) - خ - /.

(٢) وعظم: والمنطق وعظم - خ - /.

(٣) فالمشتركان: فالمشتركات - خ - /.

وأما صورها وأسمائها وصور جذورها وكذلك منفصلاتها ، فقد مثلت ذلك جميعه ، وأودعته هذا الجدول ليسهل على الناظر في هذا الفن ما أشكل عليه ، والله تعالى أعلم بالصواب .

ويتلوه الجدول : / [١٦ظ]

جدول يشتمل على صور أمثلة ذوات الأسماء ومتصلاتها وأسمائها وجذورها وكونها من الثلاث الأوائل أو من التوالي

المتصلات الست	العدد	صور المتصلات	صور جذور المتصلات	أسماء جذورها
الثلاثة الأوائل	الاسم الأول	٢ و حـ٣	حـ ١ و ١/٢ و حـ ١/٢	ذو اسمين من الستة وتسمى المرسل
	الاسم الثاني	٣ و حـ١٢	حـحـ ٦ ٣/٤ و حـحـ ٣/٤	ذو الموسطين الأول
	الاسم الثالث	حـ٨ و حـ٦	حـحـ ٤ ١/٢ و حـحـ ١/٢	ذو الموسطين الثاني
الثلاثة التوالي	الاسم الرابع	٦ و حـ٢٤	حـ(٣ و حـ٣) و حـ(٣ لا حـ٣)	الأعظم
	الاسم الخامس	٢ و حـ٥	حـ(حـ ١ و ١/٤ و ١/٢) و حـ(حـ ١ و ١/٤ لا ١/٢)	القوي على منطق وموسّط
	الاسم السادس	حـ٣ و حـ٢	حـ(حـ ٣/٤ و ١/٢) و حـ(حـ ٣/٤ لا ١/٢)	القوي على موسّطين

جدول يشتمل على صور أمثلة ذوات الأسماء ومنفصلاتها وأسمائها وجذورها وكونها من الثلاث الأوائل أو من التوالي

المنفصلات الست	العدد	صور المنفصلات	صور جذور المنفصلات	أسماء جذورها
الثلاثة الأوائل	الاسم الأول	٢ لا جـ٣	١ و جـ ١/٢ لا جـ ١/٢	منفصل عن الستة
	الاسم الثاني	جـ١٢ لا ٣	٦ جـجـ ٣/٤ لا جـجـ ٣/٤	منفصل الموسط الأول
	الاسم الثالث	جـ٨ لا جـ٦	٤ و جـجـ ١/٢ لا جـجـ ١/٢	منفصل الموسط الثاني
الثلاثة التوالي	الاسم الرابع	٦ لا جـ٢٤	جـ(٣ و جـ٣) لا جـ(٣ لا جـ٣)	الأصغر
	الاسم الخامس	٢ لا جـ٥	أو جـ(جـ ١/٤ و جـ ١/٤) لا أو جـ(جـ ١/٤ لا جـ ١/٤)	المنفصل بمنطق يصير الكل موسط
	الاسم السادس	جـ٣ لا جـ٢	جـ(جـ ٣/٤ و ١/٢) لا جـ(جـ ٣/٤ لا ١/٢)	المنفصل بموسط يصير الكل موسطا

الفصل الأول

[١٧و]

في إيجاد ذوات الأسماء

إذا أردت أن توجد نوعًا من الأنواع الستة المذكورة فعلى ما أصف .

- **أما إيجاد الأول** : فهو أن تطرح مربعًا من مربع بحيث يكون الباقي غير مربع وأوقع عليه الجيم ، ثم صله بأكبر الاسمين .

مثاله : طرحنا مربع واحد من مربع اثنين ، أعني أربعة ، فكان الباقي ثلاثة ، وهو غير مربع ، فأوقعنا عليه الجيم ، ووصلنا الأكبر به ، فصار الاسم الأول اثنين وجذر ثلاثة على هذه الصورة : ٢ و جـ ٣ .

- **وأما إيجاد الاسم الثاني** : فهو أن تضرب الفضل بين مربعين في كل واحد منهما بحيث لا يكون الخارج مربعًا ، ثم صل جذر أكبر الخارجين بالفضل بينهما .

مثاله : مربع واحد ومربع اثنين ، الفضل بينهما ثلاثة ، مضروب في كل واحد من المربعين ، فالخارج ثلاثة واثنا عشر ، فأوقعنا الجيم على الاثني عشر الذي هو أكبر الخارجين ، ثم وصلنا به الفضل بينهما ، أعني الثلاثة ، فصار الاسم الثاني ثلاثة وجذر اثني عشر ، هكذا : ٣ و جـ ١٢ .

- **وأما إيجاد الاسم الثالث** : فهو أن تضرب كل من مربعين في غير الفضل بينهما بحيث لا يكون الخارج مربعًا ، ثم صل جذر أكبر الخارجين بجذر الفضل بين الخارجين[1] .

مثاله : المربع الأول واحد/ والمربع الثاني أربعة ، ضربنا كل واحد منهما في غير [١٧ظ] الفضل ونفرضه اثنين ، فخارج الأول اثنين ، وخارج الثاني ثمانية ، فجذر ثمانية نصله بجذر الفضل بين الخارجين ، وهو ستة ، فيصير الاسم الثالث جذر ثمانية

---

(١) الفضل بين الخارجين: المربع – خ –/.

وجذر ستة هكذا : جـ٨ و جـ٦ .

وهذه **الثلاثة الأوائل** يكون فيها مسطح الفضل والأكبر مجذورًا ، وما لم يكن فمن الثلاثة التالية على ما تقدم تقريره .

– **وأما إيجاد الاسم الرابع** : أعني أول الثلاثة التالية ، فهو أن تطرح غير مربع من مربع ، بحيث لايكون الفضل مربعًا ، ثم صل جذر الفضل بجذر المربع .

مثاله : طرحنا اثني عشر من ستة وثلاثين الباقي أربعة وعشرون وهو غير مربع ، ثم وصلنا ، فصار الاسم الرابع : ستة وجذر أربعة وعشرين هكذا :

٦ و جـ٢٤

– **وأما إيجاد الاسم الخامس** : وهو الثاني من الثلاثة التوالي ، فهو أن تجمع مربعًا[١] لمربع ، ولا يكون[٢] المجتمع مربعًا ، ثم صل جذر المجتمع بجذر أحد المربعين[٣] .

مثاله : جمعنا مربع واحد إلى مربع < اثنين> وهو أربعة ، فكان خمسة ، وهو غير مربع ، ثم وصلنا جذر المجتمع بجذر أحد المربعين ، فصار الاسم الخامس اثنين وجذر خمسة هكذا :

٢ و جـ٥

[١٨و] – **وأما إيجاد الاسم السادس** : فهو أن تجمع مربعًا[٤] إلى / غير مربع بحيث يكون المجموع غير مربع ، ثم صل جذر المجموع بجذر غير المربع .

مثاله : جمعنا مربع واحد مع غير مربع ، ونفرضه اثنين ، يصير المجموع ثلاثة ، فوصلناه بجذر المزاد ، أعني غير المربع[٥] وهو اثنان ، فصار الاسم السادس جذر اثنين وجذر ثلاثة ، هكذا : جـ٢ و جـ٣[٦] .

---

(١) مربعاً: مربع – خ – /.

(٢) ولا يكون: ولا يكن – خ – /.

(٣) أحد المربعين: غير المربع – خ – /.

(٤) مربعاً: مربع – خ – /.

(٥) غير المربع: الغير مربع – خ – /.

(٦) جـ٢ : جـــ : – خ – /.

تنبيه :

قد ظهر أن الأول والرابع يحصلان[١] بالطرح ، والثاني والثالث بالضرب ، والخامس والسادس بالجمع .

– **وأما منفصلاتها** : فاتخاذها كذلك غير أنك تبدل فيها واو العطف بإلا الاستثنائية ، فيصير **منفصل الاسم الأول** اثنين إلا جذر ثلاثة هكذا :

٢ لا حـ٣

ومنفصل الاسم الثاني ثلاثة إلا جذر اثني عشر هكذا :

٣ لا حـ١٢

ومنفصل الاسم الثالث <جذر> ثمانية إلا جذر ستة هكذا :

حـ٨[٢] لا حـ٦

منفصل الاسم الرابع ستة إلا جذر أربعة وعشرين هكذا :

٦ لا حـ٢٤

ومنفصل الاسم الخامس اثنين إلا جذر خمسة هكذا :

٢ لا حـ٥

ومنفصل الاسم السادس جذر ثلاثة إلا جذر اثنين هكذا :

حـ٣ لا حـ٢

والله أعلم بالصواب .

❁❁❁

(١) يحصلان: يحصلا – خ –/.
(٢) حـ٨ : ٨ – خ –/.



الفصل الثاني

في ضرب ذوات الأسماء ومنفصلاتها

هو نظير الضرب بعضها في بعض، وفي المفرد.

اعلم أن ضرب ذوات الأسماء ومنفصلاتها هو نظير الضرب في المفردات،/ [١٨ظ] وضرب ما فيه الاستثناء من الجانبين يسمى زائدًا ومثبتًا، كما إذا كانا خاليين من الاستثناء، وضرب ما إذا كان الاستثناء من جانب واحد يسمى ناقصًا و منفيًا، وعند جمع الجواب يطرح الناقص من الزائد، أعني المنفي من المثبت يحصل المطلوب، ويكون الباقي هو خارج الضرب على عادة الجمع في الجواب. وستجيء أمثلة ذلك.

فلو قيل: اضرب خمسة في سبعة وجذر ثلاثة، فضعها في سطرين متوازيين ومد فوقهما خطًا هكذا:

حـ ٧٥	٣٥
حـ ٣ و	٥ ٧

ثم اضرب الخمسة في جذر ثلاثة بجذر خمسة وسبعين فضعها فوق الخط، ثم اضرب الخمسة في السبعة بخمسة وثلاثين فضعها أيضًا فوق الخط، فما فوق الخط هو حاصل الضرب، وذلك خمسة وثلاثين وجذر خمسة وسبعين هكذا:

حـ ٧٥ و ٣٥

ولو قيل: اضرب ستة في جذر ستة وجذر ثمانية، فضعها كما مثلنا هكذا:

حـ ٢٨٨	حـ ٢١٦
	٦
حـ ٨	و حـ ٦

ثم اضرب الستة في جذر ثمانية بجذر مائتين وثمانية[1] وثمانين، فضعها فوق الخط، ثم اضرب الستة في جذر ستة بجذر مائتين وستة عشر، فأثبتها كذلك، فما على الخط هو خارج الضرب، وذلك جذر مائتين وستة عشر وجذر مائتين وثمانية وثمانين هكذا:

ج٢١٦ و ج٢٨٨

[١٩و] **ولو قيل:** / اضرب خمسة وجذر سبعة في اثنين وجذر ستة، فضعهما في سطرين متوازيين، ومد فوقهما خطًا هكذا:

ج٤٢	ج١٥٠	ج٢٨	١٠
ج٧	و	٥	
ج٦	و	٢	

ثم اضرب جذر سبعة في جذر ستة، بجذر اثنين وأربعين، ثم اضرب جذر السبعة في اثنين بجذر ثمانية وعشرين، ثم اضرب الخمسة في جذر ستة بجذر مائة وخمسين، ثم اضرب اثنين في خمسة بعشرة، وقد تم الضرب، ويكون الجواب عشرة وجذر ثمانية وعشرين وجذر اثنين وأربعين وجذر مائة وخمسين، هكذا:

١٠ و ج٢٨ و ج٤٢ و ج١٥٠

وإن قيل: اضرب ثلاثة في اثنين إلا جذر ثلاثة، فضعها هكذا:

ج٢٧	لا	٦
ج٣	لا	٣ ٢

ثم تضرب مربع الثلاثة، وهو تسعة، في جذر ثلاثة بجذر سبعة وعشرين وهو

(١) وثمانية: ثمانية – خ – /.

ناقص لأنك ضربت مثبت في مستثنى، فتقدم عليه، إلا الاستثنائية، ثم تضرب الثلاثة في الاثنين بستة، فيكون الجواب: ستة إلا جذر سبعة وعشرين هكذا:

٦ و حـ٢٧

ولو قيل: اضرب ستة إلا جذر خمسة في ثلاثة إلّا جذر اثنين، فضعهما هكذا:

حـ١٠ ١٨ لا حـ٧٢ حـ٤٥

٦ لا حـ٥

٣ لا حـ٢

ثم تضرب الأجذار خمسة في إلّا جذر اثنين بجذر عشرة زائدة، لأن الاستثناء من الجانبين، ثم تضرب إلا جذر خمسة في ثلاثة بإلّا جذر خمسة وأربعين/ أعني [١٩ظ] ناقص ،لأنهما مختلفين، ثم اضرب الستة في إلّا جذر اثنين بإلّا جذر اثنين وسبعين، ثم اضرب الستة في ثلاثة بثمانية عشر، فيكون الجواب: ثمانية عشر وجذر عشرة إلا جذر اثنين وسبعين وإلا جذر خمسة وأربعين هكذا:

١٨ و حـ١٠ لا حـ٧٢ لا حـ٤٥

ولو قيل: اضرب ثمانية وجذر سبعة في ستة إلا جذر عشرة، فضعها هكذا:

٤٨ حـ٢٥٢ لا حـ٦٤٠ حـ٧٠

٨ و حـ٧

٦ لا حـ١٠

ثم اضرب جذر سبعة في إلّا جذر عشرة، يكن إلّا جذر سبعين، فأثبتها بعد إلّا فوق سطر الجواب لأنها ناقصة، ثم جذر السبعة أيضًا في ستة بجذر مائتين واثنين وخمسين، ثم ثمانية في إلا جذر عشرة بإلّا جذر ستمائة وأربعين، ثم ثبتها بعد إلّا،

ثم اضرب ستة في ثمانية بثمانية وأربعين، فيكون الجواب: ثمانية وأربعين وجذر مائتين <واثنين> وخمسين إلاّ جذر ستمائة وأربعين وإلا جذر سبعين هكذا:

٤٨ و ٢٥٢ لا ٦٤٠ لا ٧٠

تنبيهان:

الأول: متى ورد عليك ضرب عدد فيما يكون فيه لفظ الجذر مؤخرًا، فإنك تضربه كضرب ما يكون فيه الجذر مقدمًا، غير أنك تؤخر / من لفظ الجذر من [٢٠و] كل ضربة بقدر الجذر المؤخر، ثم في الجواب توقع لفظ الجذر المؤخر.

مثاله: إذا قيل: اضرب خمسة في أربعة وجذر خمسة وعشرين مأخوذًا جذره هكذا:

٥ في ٤ ٢٥،

فربع الخمسة بخمسة وعشرين، واضرب ذلك في جذر أربعة بجذر مائة، لكنا رفعنا الجذر الذي هو بقدر الجذر المؤخر، ثم ربعنا الخمسة مرتين بستمائة وخمسة وعشرين، وضربنا ذلك في جذر جذر خمسة وعشرين بجذر جذر خمسة عشر ألف وستمائة وخمسة وعشرين، ثم أوقعنا على ذلك الجذر المؤخر، فصار الجواب مائة وجذر خمسة عشر ألف وستمائة وخمسة وعشرين مأخوذًا جذره هكذا:

١٠٠ و ١٥٦٢٥ [١]،

لأن الجواب يجب أن يكون متصلاً بأكثر من اسم واحد، إن كان اللفظ يقع عليه الجذر متصلاً، وكذا يكون الجواب منفصلاً بما يقع عليه الجذر منفصلاً.

وإيضاح هذا المثال: إن مجموع الأربعة مع جذر الخمسة والعشرين[٢] هو تسعة، وجذرها ثلاثة، فإذا ضرب الخمسة في الثلاثة كان الجواب خمسة عشر،

(١) ١٠٠ و ١٥٦٢٥ : ١٠٠ و ١٥٦٦٥ – خ – /.

(١) والعشرين: وعشرين – خ – /.

وهو مساو لما تقدم، لأن جذر المائة عشرة، وجذر الخمسة عشر ألفًا[١] وستمائة وخمسة[٢] وعشرين: مائة وخمسة وعشرين، فإذا جمعا كان ذلك مائتين وخمسة وعشرين، وجذر ذلك خمسة عشر، وهو المطلوب.

وإن قيل: اضرب ثلاثة وجذر سبعة مأخوذًا جذره في خمسة / وجذر عشرة [٢٠ظ] مأخوذًا جذره، هكذا:

٣ ٧ في ٥ ١٠

فاعلم أن المضروبين متساويان في المرتبة، وفي هذه الصورة وما أشبهها بترك الجذر المؤخر واحدًا[٣] كان أو أكثر، ثم تضرب المضروبين على العادة، ثم توقع على الجواب لفظ الجذر المؤخر كما كان، وذلك لأن المقصود في مثل هذه الصورة هو ضرب جذر مجموع الثلاثة مع جذر السبعة لأن الجذر المؤخر صير ذلك بمنزلة اسم واحد، فإذا علمت ذلك فضع المضروبين هكذا:

١٥ ٧٠ ١٧٥ ٩٠

٣ و ٧

٥ و ١٠

ثم اضرب الثلاثة في الخمسة بخمسة عشر، وثلاثة في جذر عشرة بجذر تسعين، وخمسة في جذر سبعة بجذر مائة وخمسة وسبعين، وجذر سبعة في جذر عشرة بجذر سبعين، وأثبتنا ذلك فوق السطر على العادة، ثم أوقع على ذلك جميعه الجذر المؤخر، فيكون ذلك هو الجواب، وهو خمسة عشر وجذر سبعين وجذر مائة وخمسة[٤] وسبعين وجذر تسعين مأخوذًا جذر ذلك جميعه هكذا:

---

(١) ألفاً: ألف – خ – /.

(٢) وخمسة: خمسة – خ – /.

(٣) واحداً: واحد – خ – /.

(٤) وخمسة: خمسة – خ – /.

١٥ و ٧٠ و ٩٠ و ١٧٥

ولو قيل: اضرب ثلاثة وجذر سبعة مأخوذًا جذر جذر ذلك في اثنين وجذر ستة مأخوذًا جذره هكذا:

٣ و ٧ [١] في ٢ ٦

[٢١و] فاعلم أن الجذر / المؤخر قد ذكر في المضروب الأول مرتان، وذكر في المضروب الثاني مرة واحدة، فهما غير متساويين في الرتبة، فلابد من تربيع المضروب الثاني، أعني تضربه في نفسه، لتلحق بمرتبة المضروب الأول، ثم بعد ذلك تضربهما على العادة، كما تقدم لك في التي قبلها. **وصفة التربيع** أن تضع المضروب الثاني على هذه الصورة:

٤ ٦ ٢٤ ٢٤

٢ و ٦

٢ و ٦

فيكون الجواب عشرة وجذر ستة وتسعين مأخوذًا جذر جذر ذلك، وهو خارج تربيع المضروب الثاني، فحينئذ تضع المضروبين في سطرين خاليين[٢] عن لفظ الجذر[٣] المؤخر هكذا:

٣٠ ٦٧٢ ٧٠٠ ٨٦٤

٣ و ٧

١٠ و ٩٦

---

(١) ٣ و ٧ : ٣ و ٧ خ – /.

(٢) خاليين: خالياً – خ – /.

(٣) لفظ الجذر: مشطوب فوقهما – خ – /.

ثم تضرب أحدهما في الآخر على ما عرفت، فيكون الجواب: ثلاثين وجذر ستمائة واثنين وسبعين وجذر سبعمائة وجذر ثمانمائة وأربعة وستين مأخوذًا جذر جذر ذلك هكذا: حـ

٣٠ و ٦٧٢ حـ ٧٠٠ حـ ٨٦٤ حـ

التنبيه الثاني:

متى وقع في خارج الضرب التماثل في الجذور أو المشاركة فيها، فاجمع ذلك أو خذ الفضل بشرطه كما عرفت من جمع الجذور وطرحها عند الاتفاق في النفي أو الإثبات، وعند الاختلاف والمماثلة يذهب المثبت بالمنفي، وتجمع العدد مع العدد في الاتفاق، ويؤخذ / الفضل في الاختلاف، والباقي يكون في جهة الفضل كما [٢١ظ] في تربيع ذوات الأسماء، وفي ضرب المتصل في منفصله وعكسه.

مثاله: في تربيع ثلاثة وجذر خمسة، فضعهما فاضربهما على العادة هكذا:

(١) ٩ ٤٥ حـ ٥ ٤٥ حـ

٣ و ٥ حـ

٣ و ٥ حـ

فاجمع جذري خمسة وأربعين، يكن جذر(٢) مائة وثمانين، وصله بمجموع العددين، وهو أربعة عشر، فيكون خارج التربيع أربعة عشر وجذر مائة وثمانين، هكذا:

١٤ و ١٨٠ حـ

وكذا إذا ربعنا أربعة عشر وجذر مائة وثمانين، فافعل كما تقدم، يكن خارج التربيع ثلاثمائة وستة وسبعين وجذر مائة ألف وأحد وأربعين ألفًا ومائة وعشرين هكذا:

---

(١) ٩: ٦ – خ – /.

(٢) جذر: بجذر – خ – /.

٣٧٦ و ١٤١١٢٠ (جذر)

وفي ضرب المتصل في منفصله وعكسه :

كضرب ثلاثة وجذر خمسة في ثلاثة إلا جذر خمسة هكذا :

٤٥ (جذر) ٩ لا ٥ ٤٥ (جذر)

٣ لا ٥ (جذر)

٣ و ٥ (جذر)

أذهبنا جذر خمسة وأربعين المثبت بجذر خمسة وأربعين المنفي ، ثم طرحنا الخمسة الناقصة من التسعة[1] الزائدة الباقي أربعة من العدد مثبتًا ، فهذا هو خارج الضرب .

والأسهل في ضرب المتصل في منفصله أو عكسه : أن تأخذ الفضل بين مربعي العددين يكن خارج الضرب ، ففي هذه الصورة / [٢٢و] : مربع الثلاثة تسعة ، ومربع جذر خمسة خمسة ، والفضل بينهما أربعة ، وهو خارج الضرب ، والله أعلم بالصواب .

۞۞۞

(١) التسعة: تسعة – خ – /.

الفصل الثالث

في القسمة

تضرب كلا من المقسوم والمقسوم عليه في منفصل المقسوم عليه إن كان المقسوم عليه متصلاً، وفي متصله إن كان المقسوم عليه منفصلاً، واقسم خارج ضرب المقسوم على خارج ضرب المقسوم عليه يحصل خارج القسمة.

وإن شئت: فاضرب المقسوم عليه في منفصله، إن كان المقسوم عليه متصلاً، وفي متصله إن كان المقسوم عليه منفصلاً، واقسم المقسوم على خارج الضرب، فما كان فاضربه[1] في منفصل المقسوم عليه، إن كان المقسوم عليه متصلاً، وإلا ففي متصله إن كان المقسوم عليه منفصلاً، فما كان فهو خارج القسمة.

هذا إن كان ضربك في مفرد أي ذي[2] اسم واحد، أما إذا كان مركبًا، أعني ذا اسمين فسمه بالمحفوظ، واضرب المحفوظ في متصله أو منفصله بشرطه يخرج ذو[3] اسم واحد فاقسم عليه المقسوم، والخارج اضربه إن شئت في متصل المقسوم عليه أو منفصله، ثم ما حصل اضربه في متصل المحفوظ أو منفصله بشرطه، وإن شئت عكست يحصل المطلوب.

واعلم أنه متى تكرر الجذر أو تبعض في المقسومين أو أحدهما، فاصرفه إلى أن يكون جذر عدد، ثم لابد / من تساوي كل من المقسومين في المرتبة. [٢٢ظ]

وفي قسمة الجذور المؤخرة في اللفظ أن تجرد المقسومين منها إن تساويا رتبة، وإلا فربع الناقص بقدر ما يساوي الآخر، ثم تجردهما، ثم تقسم على العادة، والجواب توقع عليه لفظ الجذر المؤخر، أعني بقدر ذلك الجذر الذي جردته، فافهم ذلك، والله أعلم بالصواب.

---

(١) فاضربه: اضربه – خ –/.

(٢) ذي: ذا – خ –/.

(٣) ذو: ذا – خ –/.

الأمثلة[١] :

لو قيل: اقسم أربعة وعشرين على ثلاثة وجذر اثني عشر ، فخارج ضرب المقسوم عليه في منفصله ثلاثة ، قسمنا عليها الأربعة والعشرين ، فكان ثمانية ، ضربناها في منفصل المقسوم عليه ، وهو جذر اثني[٢] عشر إلا ثلاثة ، هكذا :

جـ ٧٦٨ لا ٢٤

٨
جـ ١٢ لا ٣

فيكون خارج القسمة : جذر سبعمائة وثمانية وستين إلا أربعة وعشرين هكذا :

جـ ٧٦٨ لا ٢٤

ولو قيل: اقسم مائة إلا جذر مائة على ستة وجذر ستة عشر ، على هذه الصورة :

١٠٠ لا جـ ١٠٠

٦ و جـ ١٦

فضربنا كلا من المقسوم والمقسوم عليه في منفصل المقسوم عليه ، فكان خارج ضرب المقسوم : ستمائة وجذر ألف وستمائة إلا جذر ثلاثة آلاف وستمائة وإلا جذر مائة ألف وستين ألفًا هكذا :

٦٠٠ و جـ ١٦٠٠ لا جـ ٣٦٠٠ لا جـ ١٦٠٠٠٠

[٢٢و] وخارج ضرب المقسوم عليه : عشرين ، ثم قسمنا خارج ضرب المقسوم على/ خارج ضرب المقسوم عليه ، فكان ثلاثين وجذر أربعة إلا جذر أربعمائة وإلا جذر تسعة هكذا :

---

(١) الأمثلة: المثالات – خ – /. (٢) اثني: اثنا – خ – /.

٣٠ و $\sqrt{٤}$ لا $\sqrt{٤٠٠}$ لا $\sqrt{٩}$

وهذا هو خارج القسمة .

وإن شئت القسمة في هذه الصورة بالطريقة الثانية ، فتضرب المقسوم عليه في منفصله ، أعني تأخذ الفضل بين المربعين ، وهو عشرون ، فاقسم عليه المقسوم يكن[1] الخارج خمسة إلا جذر ربع هكذا :

٥ لا $\sqrt{\frac{١}{٤}}$

ضربناه في منفصل المقسوم عليه فكان خارج القسمة كالأول ، أعني :

٣٠ و $\sqrt{٤}$ لا $\sqrt{٤٠٠}$ لا $\sqrt{٩}$

وإذا أخذ الفضل بين المثبت والمنفي كان تسعة ، وهو خارج القسمة .

ويمكن : أن يوجد في هذا المثال امتحان صحة القسمة ، لأنه مقام قولك : اقسم لنا تسعين على عشرة ، فإن خارج القسمة يكون تسعة ، كما خرج بطريق القسمة ، والله أعلم .

ولو قيل : اقسم ثمانية على واحد وجذر اثنين وجذر ثلاثة[2] ، فضربنا المقسوم عليه في منفصله ، فكان خارج الضرب ، جذر ثمانية على هذه الصورة :

١ $\sqrt{٢}$ $\sqrt{٢}$ ٢ $\sqrt{٣}$ $\sqrt{٦}$ لا $\sqrt{٣}$ $\sqrt{٦}$ ٣

١ و $\sqrt{٢}$ و $\sqrt{٣}$

١ و $\sqrt{٢}$ لا $\sqrt{٣}$

---

(١) يكن: يكون – خ – /.

(٢) ثلاثة: ثمانية – خ – /.

فأذهبنا الزائد من جذر ثلاثة وجذر ستة بما يماثلهما من الناقص ، وأذهبنا الثلاثة من / العدد الزائد بالثلاثة من العدد الناقص ، وصيرنا جذري الاثنين المثبتة جذرًا [٢٣ظ] للثمانية ، وذلك خارج القسمة فقسمنا عليه المقسوم ، وهو الثمانية ، فخرج جذر ثمانية ضربناه في منفصل المقسوم عليه ، فكان خارج القسمة أربعة وجذر ثمانية إلا جذر أربعة وعشرين ، هكذا :

٤ و حـ ٨ لا حـ ٢٤

ولو قيل: اقسم ثمانية وجذر ستين على ستة وجذر ثمانية وأربعين ، هكذا :

٨ و حـ ٦٠
٦ و حـ ٤٨

فضربنا المقسوم عليه في منفصله ، فكان اثني عشر ، قسمنا عليها مسطح المقسوم في منفصل المقسوم عليه ، وذلك جذر اثنين وسبعين وثلاثة آلاف وجذر ألفين وثمانمائة وثمانين إلا ثمانية وأربعين وإلا جذر ألفين ومائة وستين ، فكان خارج القسمة : جذر أحد وعشرين وثلث وجذر عشرين إلا جذر خمسة عشر وإلا أربعة ، هكذا : .

حـ ٢١ ١/٣ و حـ ٢٠ لا حـ ١٥ لا ٤ (١)

ولو قيل: اقسم جذر اثني عشر على جذر جذر ثلاثة وجذر جذر اثني عشر فضع ذلك هكذا :

حـ ١٢
حجـ ٣ و حجـ ١٢

ثم ضربنا المقسوم عليه في منفصله ، خرج جذر ثلاثة ، قسمنا عليها جذر الاثني

---

(١) لا حـ ١٥ لا ٤ : لا حـ ٤ لا حـ ١٥ ٤ - خ - ./

عشر، فخرج اثنان ضربناه في المنفصل، فكان خارج القسمة/ جذر جذر اثنين [٢٤و] وتسعين ومائة إلا جذر جذر ثمانية وأربعين، هكذا:

ححـ١٩٢ لا حـ٤٨ (١)

ولو قيل: اقسم ستة وجذر أربعة وعشرين على جذر اثني عشر إلا ثلاثة فضعهما هكذا:

٦ حـ٢٤

حـ١٢ لا ٣ (٢)

ثم ضربنا المقسوم عليه في متصله فكان ثلاثة، وضربنا أيضًا المقسوم في متصل المقسوم عليه، فكان ثمانية عشر وجذر أربعمائة واثنين وثلاثين، وجذر مائتين وستة عشر وجذر مائتين وثمانية[٣] وثمانين هكذا:

١٨ و حـ٤٣٢ و حـ٢١٦ و حـ٢٨٨

ثم قسمناه على الثلاثة، فخرج الجواب: ستة وجذر أربعة وعشرين وجذر اثنين وثلاثين وجذر ثمانية وأربعين، وهو خارج القسمة هكذا:

٦ و حـ٢٤ و حـ٣٢ و حـ٣٢

ولو قيل: اقسم أربعة وعشرين إلا جذر ستة على ثلاثة وجذر ثمانية هكذا:

٢٤ لا حـ٦

٣ و ٨

خارج ضرب المقسوم عليه في منفصله واحد، وخارج ضرب المقسوم في

---

(١) ححـ١٩٢: حـ٩٢ – خ – /.

(٢) حـ٢٤ : ححـ٢٧

(٣) وثمانية: ثمانية – خ – /.

منفصل المقسوم عليه اثنان وسبعون وجذر ثمانية وأربعين[١] إلا جذر أربعة آلاف وبستمائة وثمانية وإلا جذر أربعة وخمسين[٢] مقسومة على الواحد، فخارج القسمة ما ذكر بعينه وهو :

ح٥٤ لا ح٤٦٠٨ لا ح٤٨ و ٧٢

[٢٤ظ] ولو قيل : اقسم ستة إلا جذر أربعة وعشرين على جذر ثمانية إلا جذر ستة / هكذا :

ح٢٤ لا ٦

ح٦ لا ح٨

فخارج ضرب المقسوم عليه في متصله اثنان، فقسمنا على الاثنين المقسوم، فكان ثلاثة إلا جذر ستة، ضربناه في متصل المقسوم عليه، فكان خارج القسمة جذر اثنين وسبعين وجذر أربعة وخمسين إلا جذر ثمانية وأربعين وإلا ستة، هكذا :

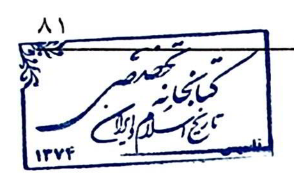
٦ لا ح٤٨ لا ح٥٤ و ح٧٢

والله أعلم.

❀❀❀

(٤) وأربعين: وأربعون – خ – /.

(٥) وخمسين: وخمسون – خ – /.



تنبيهان :

<التنبيه> **الأول** : اعلم أن الخارج من قسمة عدد على عدد ، هو كالخارج من قسمة مسطحي أكبر المقسومين في عدد ثالث على أصغرهما <في ذلك العدد بعينه> ، أو كالخارج من قسمة المقسوم على مسطح المقسوم عليه في عدد ثالث ، ثم ضرب الخارج في ذلك العدد بعينه .

مثاله : قسمنا اثني عشر على ثلاثة ، الخارج : أربعة ، فإذا ضربنا كلا من المقسومين في خمسة مثلاً ، ثم قسمنا خارج ضرب المقسوم ، وهو ستون ، على خارج ضرب المقسوم عليه ، وهو خمسة عشر ، كان خارج القسمة أربعة .

وكذلك إذا قسمنا المقسوم ، وهو اثنا عشر ، على مسطح المقسوم عليه والعدد الثالث الذي هو خمسة ، وذلك أربعة أخماس ، وضربنا ذلك في الخمسة ، فكان ذلك أربعة أيضًا .

فإن قلت : / لم كان المقسوم عليه يضرب في منفصله أو متصله ، ولِمَ لم يكن[1] [٢٥و] في غيره ، قلنا لتعذر القسمة على ذي اسمين أو منفصله ، فإذا صيرناه ذا اسم واحد أمكن وعدولنا عن غيره له أليق بهذا الفن وأسهل لما تقدم أن خارج ضرب المتصل في منفصله أو عكسه هو فضل مربعي أكبر الاسمين على أصغرهما .

التنبيه <**الثاني**> : اعلم أن الخارج من قسمة عدد على عدد هو كالخارج من قسمة المقسوم على الخارج من ضرب المقسوم عليه في مسطح عددين ما ، وضرب الخارج في الحاصل من مسطح ذينك العددين .

مثاله : قسمنا اثني عشر على ثلاثة الخارج أربعة ، وهو مساو لما إذا ضربنا المقسوم عليه ، وهو ثلاثة ، في مسطح عددين ، وبفرض العددين : اثنين وأربعة ،

---

(١) لِمْ يكن: لا كان – خ – /.

ومسطحهما ثمانية، وحاصل ضرب المقسوم عليه في ثمانية : أربعة وعشرون، فإذا قسمنا عليه المقسوم -وهو اثنا عشر، كان الخارج نصفًا، ثم إذا ضربنا ماخرج من القسمة، وهو النصف، في مسطح ذينك العددين، الذي هو ثمانية، أو في أحدهما، والخارج في الآخر، حصل المطلوب، وكان خارج القسمة أربعة كما تقدم.

[٢٥ظ] **واعلم** وفقك الله تعالى، / أن الجمهور لما رأى طول الأعمال الحاصلة من العددين الأجنبيين، اقتصر على أن أقام منفصل المقسوم عليه أو متصله مقام العدد الأول كما عرفت آنفًا في التنبيه الأول، وأقام متصل المحفوظ أو منفصله مقام العدد الثاني لما وجد من الأولوية في الاختصار، وحسمًا لاتساع هذا الباب ونتيجة هذا التنبيه الثاني أنه لما ذكرنا في التنبيه الأول تعذر القسمة على ذي اسمين، استخرجنا في هذا التنبيه زيادة عمل لتكون القسمة على ذي اسم واحد، ويظهر ذلك في مثال وهو :

إذا قيل لك اقسم عشرة على جذر جذر ثمانية وجذر جذر ستة، فإنك تضرب المقسوم عليه في منفصله، كما عرفت، وهو جذر جذر ثمانية إلا جذر جذر ستة، فيكون خارج الضرب جذر ثمانية إلا جذر ستة، وهذا هو المحفوظ، فاضرب هذا المحفوظ في متصله، فتكون ثمانية إلا ستة، ويكون الفضل بينهما اثنين، وهو ذو [٢٦و] اسم واحد،/ فاقسم عليه المقسوم، وهو عشرة، فيكن(١) الخارج خمسة، ثم نضربه(٢) في منفصل المقسوم عليه، أعني جذر جذر ثمانية إلا جذر جذر ستة، فيكون(٣) خارج الضرب جذر جذر خمسة آلاف إلا جذر جذر ثلاثة آلاف وسبعمائة وخمسين، ثم نضرب(٤) ذلك في متصل المحفوظ، وهو جذر ثمانية وجذر ستة، فكان جذر جذر ثلثمائة وعشرين ألفًا وجذر جذر مائة وثمانين ألفًا إلا جذر جذر مائة ألف وخمسة وثلاثين ألفًا(٥) إلا جذر< جذر> مائتي ألف وأربعين ألفًا،

(١) فيكن: فيكون - خ - /.
(٢) نضربه: ضربناه - خ - /.
(٣) فيكون: فكان - خ - /.
(٤) نضرب: ضربنا - خ - /.
(٥) ألفاً: ألفاً وتسعمايه - خ - /.

وهو المطلوب ، أعني خارج القسمة .

وإن شئت : قدمت الضرب في متصل المحفوظ ، ثم الخارج في منفصل المقسوم عليه ، فإن الجواب : واحد ، وعلى هذا الطريق فقس ، والله أعلم .

فلو قيل لك : اقسم لنا ستة عشر على اثنين وجذر اثنين وجذر عشرة ، فاعمل كما عرفت ، من أن تضرب المقسوم عليه في منفصله ، يكن[1] جذر اثنين وثلاثين إلا أربعة ، أعني بعد إذهاب الزائد بالناقص في الأربعين والعشرين ، وفضل المستثنى على المثبت أربعة ، وصيرورة/ جذري الثمانية جذر عدد واحد ، وهو جذر اثنين [٢٦ظ] وثلاثين هكذا :

٤	٢	ح ٨	ح ٨	ح ٤٠	ح ٢٠	لا	١٠	ح ٤٠	ح ٢٠
٢	ح ٢	و	ح ١٠						
٢	ح ٢	لا	ح ١٠						

وهذا هو المحفوظ فاضربه في متصله يكن[2] الخارج ستة عشر بعد أخذ الفضل بينهما ، قسمنا عليه المقسوم ، وهو ستة عشر ، فكان الخارج من القسمة واحدًا ، ضربناه في منفصل المقسوم عليه ، وهو اثنان وجذر اثنين إلا جذر عشرة[3] ، فخرج بعينه ، فضربناه في متصل المحفوظ ، فكان الخارج ستة عشر وجذر مئة وثمانية وعشرين وجذر اثنين وثلاثين[4] إلا جذر مائة وستين وإلا جذر ثلاثمائة وعشرين ، وذلك هو خارج القسمة بعد جمع الجذور مع الجذور والعدد مع العدد .

ولو شئنا لقدمنا الضرب في متصل المحفوظ والخارج في منفصل المقسوم عليه فيحصل كالأول ، والله اعلم .

---

(١) يكن: يكون – خ – /.
(٢) يكن: يكون – خ – /.
(٣) عشرة: ثلاثة – خ – /.
(٤) وجذر مئة ....وثلاثين: وجذر مائتين وثمانية وثمانين – خ – /.

ولو قيل : اقسم سبعة على جذر[1] ثلاثة غير جذر جذر اثنين ، فاضرب جذر ثلاثة غير جذر جذر اثنين في ذي اسمه ، أعني اضرب المقسوم عليه في متصله ، فيكون ثلاثة غير جذر اثنين ، وهو المحفوظ ، فاضربه في متصله/ يكن خارج [٢٧و] الضرب سبعة ، فاقسم عليها المقسوم ، أعني السبعة ، فيكون الخارج واحدًا ، فاضربه في متصل المقسوم عليه ، يخرج مثل المقسوم عليه بعينه ، فاضربه في متصل المحفوظ ، الذي هو ثلاثة وجذر اثنين ، يخرج الجواب ، وهو جذر ستة وجذر سبعة وعشرين وجذر جذر ثمانية وجذر جذر مائة واثنين وستين ، وهذا هو خارج القسمة هكذا :

حـ   حـ   حجـ   حجـ
٦ و ٢٧ و ٨ و ١٦٢

والله أعلم .

واعلم أنه متى ورد عليك ما يكون لفظ الجذر فيه مؤخرًا ، فطريق العمل فيه على ما أصف في هذه الأمثلة . مثل :

إن قيل[2] : اقسم خمسة وجذر سبعة مأخوذًا جذر ذلك على جذر جذر عشرة هكذا :

حـ
حـ
٥ و ٧
حجـ
١٠

فاعلم أن المقسوم غير مساو للمقسوم عليه في المرتبة ، فلا بد أن تصرف المقسوم إلى عدد يساوي المقسوم عليه في المرتبة ، وذلك بأن تربع المقسوم كما سبق ، فيكون اثنين وثلاثين وجذر سبعمائة مأخوذًا جذر جذر ذلك ، ثم اقسم ذلك على جذر جذر العشرة ، بأن تضعهما هكذا[3] : ،

---

(١) على جذر: مكررة – خ – /.

(٢) قيل: يقال – خ – /.

(٣) هكذا: هذا – خ – /.

٣٢ و ٧٠٠

١٠

ثم تجرد كلًا من المقسومين من لفظ الجذر المؤخر ، ثم اقسم الاثنين والثلاثين على العشرة ، لأن رتبتيهما متساويتان ، فيحصل ثلاثة وخمس ، ثم تقسم السبعمائة / على مربع العشرة ، لأن موسط العشرة المقسوم عليه ، قد ذكر فيه الجذر مرتان [٢٧ظ] والسبعمائة ثلاث مرات ، فيكون الخارج جذر سبعة ، ثم توقع على ذلك جميعه لفظ المؤخر الذي جردته ، وهو الجذر المكرر مرتين هكذا :

٣ و $\frac{١}{٥}$ و ٧

وإن قيل : اقسم عشرة وجذر خمسة مأخوذًا جذر ذلك على ثلاثة وجذر ستة مأخوذًا جذر ذلك ، فهذان المقسومان متساويان في الرتبة فضعهما هكذا :

١٠ و ٥

٣ و ٦

ثم جردهما من الجذر المؤخر ، ثم اضرب المقسوم عليه في منفصله ، فيكون الفضل ثلاثة ، فاقسم عليها العشرة ، تكن(١) ثلاثة وثلث ، ثم اقسم عليها جذر الخمسة يكن جذر خمسة أتساع ، ثم اضرب ذلك في منفصل المقسوم عليه كما تقدم وصفته :

١٠ و ٥ لا ٦٦ و $\frac{٢}{٣}$ لا ٣ و $\frac{١}{٣}$ (٢)

فتضرب الثلاثة في ثلاثة وثلث بعشرة ، ثم في جذر خمسة أتساع بجذر خمسة ، ثم تضرب إلا جذر ستة في ثلاثة وثلث بجذر ستة وستين وثُلثين ، ثم في جذر خمسة أتساع

---

(١) تكن: تكون – خ – /. (٢) لا: و– خ – /.

بالأجذر ثلاثة وثلث ، ثم توقع على ذلك جميعه الجذر المؤخر الذي جردته منهما ، فيكون الجواب : /عشرة وجذر خمسة[١] إلا جذر ستة وستين وثُلثين وإلا جذر ثلاثة [٢٨و] وثلث[٢] < ثم توقع على ذلك جميعه لفظ الجذر المؤخر الذي جردته> هكذا :

١٠ و ٥ لا ٦٦ ٢/٣ لا ٣ و ١/٣ [٣] .

ولو قيل : اقسم جذر جذر عشرة أو عشرة مأخوذًا جذر جذرها على جذر ستة وجذر ثمانية مأخوذًا جذر جذر ذلك فضعهما هكذا :

١٠

٦ و ٨

ثم تجردهما من لفظ الجذر المؤخر ، لأن المقسومين متساويان في الرتبة ثم تضرب المقسوم عليه في منفصله يحصل اثنان ، فاقسم العشرة عليها تكن خمسة ، فاضربه في المنفصل ، وهو جذر ثمانية إلا جذر ستة ، يحصل جذر مائتين إلا جذر مائة وخمسين ، فأوقع على ذلك الجذر المؤخر ، فيكون الجواب : جذر مائتين إلا جذر مائة وخمسين مأخوذًا جذر جذر ذلك هكذا :

٢٠٠ لا ١٥٠

---

(١) خمسة: خمسة ماخودا جذر ذلك – خ /.

(٢) وثلث: وثلث ماخودا جذر ذلك – خ – /.

(٣) ١٠و ٥ لا ٦٦ ٢/٣ لا ٣و ١/٣ :

١٠ و ٥ لا ٦٦ ٢/٣ لا ٣و ١/٣ – خ – /.

وإن قيل : اقسم عشرة وجذر سبعة مأخوذًا جذر ذلك واثنين وجذر ثلاثة على ثلاثة إلا جذر ستة ، هكذا :

$$\sqrt{\text{١٠ و } \sqrt{\text{٧}}} \text{ و ٢ و } \sqrt{\text{٣}}$$

فاعلم أن المقسوم قد تنوع إلى ثلاثة أنواع : الأول ٣ لا $\sqrt{\text{٦}}$ ذكر فيه لفظ الجذر المؤخر ، والثاني : عدد مطلق ، والثالث : جذر عدد ، والمقسوم عليه منفصل .

والعمل في ذلك أن تقسم / كلًا[1] من الأنواع الثلاثة على المقسوم عليه [٢٨ظ] بحسبه على ما عرفت ، أما قسمة النوع الأول فهو أن تربع المقسوم عليه ليساوي مرتبة المقسوم هكذا :

$$\frac{\sqrt{\text{٩ \quad ٦ \quad } \sqrt{\text{٥٤}} \quad \sqrt{\text{٥٤}}}}{}$$

٣ لا $\sqrt{\text{٦}}$

٣ لا $\sqrt{\text{٦}}$

وخارج التربيع خمسة عشر إلا جذر مائتين وستة عشر مأخوذًا جذره ، ثم تجردهما من الجذر المؤخر ، وتقسم العشرة وجذر السبعة على خمسة عشر إلا جذر مائتين وستة عشر ، فاضرب المقسوم عليه في متصله ، فيكون الفضل بين مربع الاسمين ، فتقسم عليها العشرة يحصل واحد وتسع ، ثم تقسم على مربع التسعة جذر السبعة ، يحصل جذر سبعة أتساع التسع ، ثم اضرب ذلك في متصل المقسوم عليه على العادة ، والخارج أوقع عليه الجذر المؤخر فيكون الجواب : ستة عشر وثلثين وجذر تسعة عشر وأربعة أتساع وجذر ثمانية عشر وستة أتساع وجذر مائتين وستة وستين وستة أتساع مأخوذًا جذره هكذا :

---

(١) كلًا: كل – خ – /.

ح ١٦ ٢/٣ و ح ١٩ ٤/٩ و ح ٢٦٦ ٦/٩ و ح ١٨ ٦/٩

ــ

١٥ و ح ٢١٦

١ و ١/٩ و ح ٠/٩ ٧/٩

وأما قسمة النوع الثاني والثالث، فتقسم اثنين وجذر ثلاثة على فصل مربعي ذي الاسمين، فيخرج ثلثان وجذر ثلث، فتضرب ذلك في متصل المقسوم عليه، وهو ثلاثة وجذر ستة، فيكون جوابه هكذا:

٢ ح ٢ ح ٣ ح ٢ و ٢/٣

[٢٩و] ثم تجمع هذا الجواب بجواب النوع/ الأول، فيكون خارج قسمة جميع المسألة هكذا:

ح ١٦ ٢/٣ و ح ١٩ ٤/٩ و ح ١٨ ٦/٩ و ح ٢٦٦ ٦/٩ و٢ و ح ٢ و ح ٣ و ح ٢و ٢/٣

والله أعلم.

ولو قيل: اقسم جذر ثلاثة وجذر عشرة مأخوذًا جذره وثمانية وجذر تسعين مأخوذًا جذر جذره على ثلاثة وجذر ستة هكذا:

ح ح ٣ ح ١٠ و ح ح ٨ ح ٩٠ (١)

٣ و ح ٦

فالمقسوم تنوع إلى نوعين: الأول ذكر فيه لفظ الجذر مرة واحدة، والثاني مرتين، وليس في المقسوم عليه شيء من ذلك ولا يخفى قسمة ذلك مما تقدم، وذلك أن تربع

---

(١) ح ٩٠ : ح ٩، - خ - /.

المقسوم عليه مرة واحدة ليساوي المقسوم الأول ، فيكون خارج التربيع خمسة عشر وجذر مائتين وستة عشر مأخوذًا جذره ، ثم تجرد المقسومين من الجذر المؤخر ،وتقسم المقسوم على تسعة ، التي هي فضل مربعي الاسمين ، فيكون ذلك جذر ثلث تسع وجذر تسع وتسع تسع ، فاضربه في منفصل المقسوم عليه ، أعني الخمسة عشر إلا جذر مائتين وستة عشر ، فيكون خارج الضرب على هذه الصورة :

٨ ١/٣ و ٢٧ ٧/٩ لا ٨ لا ٢٦ ٢/٣

١٥ لا ٢١٦

٠/٩ ١/٣ و ١/٩ ١/٩

وهو جذر ثمانية وثلث وجذر سبعة وعشرين وسبعة أتساع ، إلا جذر ثمانية وإلا جذر ستة وعشرين / وثلثين مأخوذًا جذرهما ، ثم تربع المقسوم عليه مرة ثانية [٢٩ظ] فيحصل أربعمائة وأحد[١] وأربعين وجذر مائة ألف وأربعة وتسعين ألفًا وأربعمائة مأخوذًا جذر جذره هكذا :

٤٤١ ١٩٤٤٠٠

ثم تجرد كلا من الجذر المؤخر كما عرفت ، وتقسم ثمانية وجذر تسعين على فضل مربعي المقسوم عليه ، وهو أحد وثمانون يخرج ثمانية أتساع تسع وجذر تسع تسع وتسع تسع تسع ، فاضرب ذلك في منفصل المقسوم عليه تكن ثلاثة وأربعين وخمسة أتساع وجذر ألفين وستمائة وسبعة وستين وسبعة أتساع إلا جذر ألفين وستمائة وستة وستين وثلثين وإلا جذر ألف وثمانمائة وستة[٢] وتسعين وثلثي أربعة أتساع[٣] ، ثم توقع على ذلك كله الجذر المؤخر ، فيكون الجواب على هذه الصورة :

---

(١) وأحد: أحد – خ –/.

(٢) وستة: وست – خ –/.

(٣) أربعة أتساع: تسع – خ – /.

جـ ٤٣ و $\frac{٥}{٩}$ و ٢٦٦٧ و $\frac{٧}{٩}$ لا ٢٦٦٦ و $\frac{٢}{٣}$ لا ١٨٩٦ و $\frac{٤}{٩}$ $\frac{٢}{٣}$ [١] [٢]

ثم يضاف إليه الجواب الأول

$\frac{٠}{٩}$ $\frac{٨}{٩}$ و $\frac{٠}{٩}$ $\frac{١}{٩}$ $\frac{١}{٩}$

فيكون جواب المسألة جميعها: جذر ثمانية[٣] وثلث وجذر سبعة وعشرين وسبعة أتساع إلا جذر ثمانية وإلا جذر ستة[٤] عشرين وثلثين مأخوذًا جذر ذلك وثلاثة وأربعين وخمسة أتساع وجذر ألفين وستمائة وسبعة وستين / وسبعة أتساع [٣٠و] إلا جذر ألفين وستمائة وستة وستين وثلثين وإلا جذر ألف وثمانمائة وستة[٥] وتسعين وثلثي أربعة أتساع[٦] مأخوذًا جذر جذر ذلك هكذا:

[٧]

جـ ٨ $\frac{١}{٣}$ و ٢٧ $\frac{٧}{٩}$ لا ٨ لا ٢٦ $\frac{٢}{٣}$

و جـ ٤٣ $\frac{٥}{٩}$ و ٢٦٦٧ $\frac{٧}{٩}$ لا ٢٦٦٦ $\frac{٢}{٣}$ لا ١٨٩٦ $\frac{٤}{٩}$ $\frac{٢}{٣}$

والله أعلم بالصواب.

۞۞۞

(١) $\frac{٢}{٣}$: $\frac{٢}{٣}$ – خ – /.

(٢) $\frac{٤}{٩}$ $\frac{٢}{٣}$: $\frac{٢}{٩}$ $\frac{٢}{٣}$ – خ – /.

(٣) ثمانية: ثمانية عشر – خ – /.

(٤) ستة: سبعة – خ – /.

(٥) وستة: ستة – خ – /.

(٦) أربعة أتساع: تسع – خ – /.

(٧) ٨:١٨ – خ – /.

الفصل الرابع

في أخذ جذور ذوات الأسماء والمنفصلات

ولنذكر في ذلك ثلاث طرق :

الأولى : أن تسقط ربع مربع أصغرهما من ربع مربع أكبرهما ، وخذ جذر الباقي فزده على نصف أكبرهما ، ثم احفظ جذر المجتمع ، فهو المحفوظ الأول ، وأنقصه أيضًا من نصف جذر أكبرهما واحفظ جذر الباقي ، فهو المحفوظ الثاني ، ثم خذ[1] مجموع المحفوظين ، أعني بحرف الواو ، أو فضل[2] ما بينهما بحرف إلا يحصل المطلوب .

الثانية : أن تسقط مربع أصغر الاسمين من مربع أكبرهما ، واحفظ جذر الباقي وزده على أكبرهما ، وخذ جذر نصف المجتمع ، وأسقط المحفوظ من أكبرهما ، وخذ جذر نصف الباقي ، فالمطلوب مجموع الجذرين للمتصل وجذر الفضل بينهما للمنفصل .

الثالثة : أن تأخذ جذر ربع فضل ما بين مربعي الاسمين واحمله على نصف أكبر الاسمين واحفظ جذر المجتمع واطرحه أيضًا من نصف أكبر/ الاسمين ، [٣٠ظ] واحفظ جذر الباقي ، فالمطلوب هو[3] مجموع المحفوظين ، أو فضل[4] ما بينهما ، والله أعلم .

تنبيه :

المراد بقولنا الحمل أو الزيادة أو الجمع أو الطرح فالمراد به ما تقدم في الجذور .

---

(١) خذ: خذ جذر – خ – /.

(٢) أو فضل: أو جذر فضل – خ – /.

(٣) هو: هو جذر – خ – /.

(٤) أو فضل: أو جذر فضل – خ – /.

مثاله :

في معرفة جذر الاسم الأول وهو : اثنان وجذر ثلاثة هكذا : ٢ و جـ٣ ، فمربع الاثنين ، وهو الأكبر ، أربعة ، ومربع جذر ثلاثة : ثلاثة ، أعني بزوال الجيم كما عرفت ، ثم أسقِطْ ربع الثلاثة من ربع الأربعة يبق[1] ربع ، خذ جذره ، واضرب بسطه ، وهو واحد في الإمام ، وهو أربعة ، واقسم جذر ما حصل على الإمام يكن نصفًا ، فاحمله على نصف أكبر الاسمين ، الذي هو واحد ، فيكون واحدًا ونصفًا ، ثم أنقصه منه ، فيكون نصفًا ، ثم أوقع الجذر على كل منهما ، فيكون جذر الاسم الأول < جذر> واحد ونصف وجذر نصف هكذا :

جـ(١ و ١/٢) و جـ(١/٢)

ويسمى ذو[2] الاسمين من الستة ، ويقال له : المرسل ، لأنه يخرج من ذوات الاسمين الستة كلها .

وأما جذر الاسم الثاني :

وهو : ثلاثة وجذر اثني[3] عشر هكذا : ٣ و جـ١٢ ، فمربع الثلاثة تسعة ، ومربع جذر اثني عشر اثنا عشر ، ثم أسقطنا ربع التسعة ، وهو اثنان وربع من ربع مربع < جذر> اثني عشر تبقى[4] ثلاثة/ أرباع ، نأخذ[5] جذرها بأن نوقع الجيم [٣١و] عليها ، فيكون جذر ثلاثة أرباع هكذا : جـ(٣/٤)[6]

جمعناه لنصف أكبر الاسمين الذي هو جذر اثني عشر ، ونصفه يُعْلَم بضرب

(١) يبق: يبقى – خ – /.
(٢) ذو: ذا – خ – /.
(٣) اثني: اثنا – خ – /.
(٤) تبقى: تبق – خ – /.
(٥) نأخذ: أخذنا – خ – /.
(٦) جـ(١/٣) : ٣/٤

ربع في جذر اثني عشر بجذر ثلاثة ، وجمعهما بجمع الجذور كما مر ، بأن تزيد[١] جذري مسطحهما على مجموعهما ، ففي هذه الصورة ضربنا الثلاثة في بسط الثلاثة أرباع ، وهي ثلاثة بتسعة ، فقسمناها على المخرج يخرج اثنين وربعًا ، وجذره واحد ونصف ، ضعفه ثلاثة ، حملناه على مجموع العددين فكان جذر ستة وجذر ثلاثة أرباع ، وهو المحفوظ الأول ، ثم طرحنا الضعف من مجموع العددين فكان جذر ثلاثة أرباع ، وهو المحفوظ الثاني ، ثم جمعنا المحفوظين بواو العطف ، وأخذنا جذر كل منهما[٢] ، فكان جذر جذر ستة وثلاثة أرباع وجذر جذر ثلاثة أرباع ، هكذا :

$$\sqrt{6\ و\ \frac{3}{4}}\ و\ \sqrt{\frac{3}{4}}$$

ويسمى : ذا الموسطين الأول ، لأن كل واحد منهما موسط .

وأما جذر الاسم الثالث :

وهو : جذر ثمانية وجذر ستة هكذا : $\sqrt{8}$ و $\sqrt{6}$ ، أسقطنا ربع مربع <جذر> الستة ، وهو واحد ونصف ، من ربع مربع <جذر> الثمانية ، وهو اثنان ، الباقي نصف ، أخذنا جذره بإيقاع الجيم عليه ، وحملناه على نصف أكبر الاسمين ، ونصف أكبر الاسمين ، هو الثمانية ، بطريق تنصيف الجذور ،/ جذر الاثنين ، [٣١ظ] فصار مجموعهما بطريق جمع الجذور جذر أربعة ونصف ، ثم طرحناه من أكبر الاسمين بطرح الجذور ، فكان جذر نصف ، ثم أوقعنا على كل منهما[٣] الجيم ، فصار جذر الاسم الثالث جذر جذر أربعة ونصف وجذر جذر نصف على هذه الصورة :

$$\sqrt{4\ و\ \frac{1}{2}}\ و\ \sqrt{\frac{1}{2}}$$

(١) تزيد: تزد – خ – /.

(٢) جذر كل منهما: جذر ذلك – خ – /.

(٣) على كل منهما: على المجموع – خ – / .

ويسمى : ذو الموسطين الثاني ، لأن لكل واحد منهما موسطه أيضًا[١] .

وأما جذر الاسم الرابع :

والعدد فيه هو الأكبر : وهو ستة وجذر أربعة وعشرين هكذا : ٦ و ح ٢٤ ، طرحنا ربع مربع < جذر> الأربعة والعشرين ، وذلك ستة ، من ربع مربع الستة ، وذلك تسعة ، الباقي ثلاثة ، أخذنا جذرها ، عندما[٢] أوقعنا الجيم عليها ، فصار جذر ثلاثة جمعناها إلى نصف الاسم الأكبر بحرف العطف ، إذ لا يمكن الجمع بغير ذلك ، لأنه عدد وجذر عدد ، فالمجتمع ثلاثة وجذر ثلاثة ، ثم أسقطنا أيضًا جذر ثلاثة من ثلاثة بحرف الاستثناء ، فكان ثلاثة إلا جذر ثلاثة ، ثم أوقعنا على كل منهما[٣] الجذر ، فيكون جذر الاسم الرابع : ثلاثة وجذر ثلاثة مأخوذًا جذره وثلاثة إلا جذر ثلاثة مأخوذ جذر الباقي هكذا :

ح (٣ و ح ٣) و ح (٣ لا ح ٣)

[٣٢و] ويسمى : الأعظم ،/ لأن منطقه الأول أعظم من موسطه .

وأما معرفة جذر الاسم الخامس :

والجذر فيه أكبر : وهو اثنان وجذر خمسة هكذا : ٢ و ح ٥ ، أسقطنا ربع مربع الأصغر من ربع مربع الأكبر ، الباقي ربعًا وجذره نصف ، حملناه على نصف جذر خمسة ، بأن قسمنا خمسة[٤] على أربعة ، فكان جذر واحد وربع حملنا عليه النصف بواو العطف ، فكان جذر واحد وربع ونصف[٥] ، ثم أنقصنا[٦] النصف أيضًا فكان جذر واحد وربع إلا نصفًا[٧] ، ثم أخذنا جذر ذلك ، بأن أوقعنا الجذر

---

(١) لأن لكل واحد منهما موسطه أيضاً: لأنه أيضاً كل واحد منهما موسطه – خ – /.

(٢) عندما: بأن – خ – /.

(٣) على كل منهما: على الجميع – خ – / .

(٤) خمسة: الخمسة – خ – /.

(٥) ونصف: وجذر نصف – خ – / .

(٦) أنقصنا: نقصنا – خ – /.

(٧) إلا نصفاً: الا جذر نصف – خ – / .

على كل منهما ، فكان جذر الاسم الخامس : جذر واحد وربع ونصف[١] مأخوذًا جذره ، وجذر واحد وربع إلا نصفًا[٢] مأخوذًا جذر[٣] الباقي هكذا :

$$\sqrt{\sqrt{1+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}}\ \text{[٤]}\ و\ \sqrt{\sqrt{1+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}}\ \text{[٤]}$$

ويسمى القوي على منطق وموسّط .

وأمّا معرفة جذر الاسم السادس :

وهو جذر اثنين وجذر ثلاثة هكذا $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ ، أسقطنا ربع مربع الأصغر ، وهو نصف ، من ربع مربع الأكبر ، وهو ثلاثة أرباع ، الباقي ربع ، أخذنا جذره بنصف ، حملناه على نصف جذر أكبر الاسمين الذي هو ثلاثة أرباع ، فكان جذر ثلاثة أرباع ونصف ، ثم أنقصناه[٥] منه بالاستثناء فكان جذر ثلاثة أرباع إلا نصف ، ثم أخذنا جذر كل منهما[٦] ، بأن أوقعنا الجيم على ذلك ، فكان جذر الاسم السادس : / جذر ثلاثة أرباع ونصف مأخوذًا جذره وجذر ثلاثة أرباع إلا [٣٢ظ] نصف مأخوذًا جذر الباقي هكذا :

$$\sqrt{\sqrt{\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}}\ و\ \sqrt{\sqrt{\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}}$$

ويسمى القوي على مُوسّطين ، والله أعلم .

وأمّا جذور منفصلاتها :

فكذلك غير أنك تبدل[٧] حرف العطف بحرف[٨] الاستثناء بين الاسم الأكبر

---

(١) ونصف: وجذر نصف – خ – / .

(٢) إلا نصفاً: إلا جذر نصف – خ – /.

(٣) جذر: جد – خ – /.

(٤) $\frac{1}{2}$: $\sqrt{\frac{1}{2}}$ – خ – / .

(٥) أنقصناه: نقصناه – خ – /.

(٦) جذر كل منهما: جذر ذلك – خ – /.

(٧) أنك تبدل: أن بدل – خ – /.

(٨) بحرف: حرف – خ – /.

والأصغر ، وأعني بالمنفصل ، تفاضل قسمي جذر متصله .

فأمّا جذر منفصل الاسم الأول :

فهو جذر واحد ونصف إلا جذر نصف هكذا :

$$\sqrt{١ \text{ و } \frac{١}{٢}} \;\text{ لا }\; \sqrt{\frac{١}{٢}}$$

ويسمى المنفصل الأول من الستة ، ويُسمى أيضًا ذا الاسمين المرسل .

وأمّا جذر منفصل الاسم الثاني :

فجذر جذر ستة وثلاثة أرباع إلا جذر جذر ثلاثة أرباع هكذا :

$$\sqrt{\sqrt{٦ \text{ و } \frac{٣}{٤}}} \;\text{ لا }\; \sqrt{\sqrt{\frac{٣}{٤}}}$$

ويسمى منفصل الموسط الأول .

وأمّا <جذر> منفصل الاسم الثالث :

فجذر جذر أربعة ونصف إلا جذر جذر نصف هكذا :

$$\sqrt{\sqrt{٤ \; \frac{١}{٢}}} \;\text{ لا }\; \sqrt{\sqrt{\frac{١}{٢}}}$$

ويسمى منفصل الموسط الثاني .

وأمّا جذر منفصل الاسم الرابع :

فثلاثة وجذر ثلاثة مأخوذًا جذره إلا ثلاثة وإلا جذر ثلاثة مأخوذًا جذر الباقي هكذا :

$$\sqrt{٣ \text{ و } \sqrt{٣}} \;\text{ لا }\; \sqrt{٣ \text{ لا } \sqrt{٣}}$$

[٣٣و] ويسمى الأصغر بضد ما سُمي به جذر/ متصله .

وأمّا جذر منفصل الاسم الخامس:

فجذر واحد وربع وجذر ربع[١] مأخوذًا جذره، إلا جذر واحد وربع وإلا جذر ربع مأخوذًا جذر الباقي هكذا:

(٢)

$$\sqrt{\sqrt{1+\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{1}{4}}} - \sqrt{\sqrt{1+\frac{1}{4}}-\sqrt{\frac{1}{4}}}$$

ويسمى المنفصل منطقًا[٣]، يصير الكل موسّطًا.

فأمّا جذر منفصل الاسم السادس:

فجذر ثلاثة أرباع ونصف مأخوذًا جذره، إلا جذر ثلاثة أرباع إلا نصف مأخوذًا جذر الباقي هكذا:

$$\sqrt{\sqrt{\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}} - \sqrt{\sqrt{\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}}$$

ويسمى المتصل موسّطًا[٤]، يصير الكل موسّطًا، والله تعالى أعلم بالصواب.

❁❁❁

---

(١) ربع: نصف – خ – / .

(٢) $\sqrt{\frac{1}{4}}$: و $\sqrt{\frac{1}{2}}$ – خ – / .

(٣) منطقاً: بمنطق – خ – /.

(٤) موسطاً: بموسط – خ – –/.



الفصل الخامس

في اختبار الجذر وامتحان صحته

ويسمى الرد، أعني من الجذر إلى المجذور، لأن من البين أن جذر كل عدد إذا ضرب في نفسه، خرج ذلك العدد، وتبين أيضًا في أصول التجذير أن أكبر الاسمين يحصل من مربعي قسمي الجذر، وأن الأصغر يحصل من ضرب أحد القسمين في ضعف الآخر.

وطريق ذلك: أن تربع الجذر بأن تضع الجذر في سطر وتحته مثله، وتضرب كل قسم في مثله، واجمع جذري الخارجين، فيعود أكبر الاسمين، ثم تضرب كل قسم في منحرفه، وتجمع الخارجين/ فيعود أصغرهما، فإن خرج المجذور فالجذر [٣٣ظ] صحيح وإلا فلا، ولنمثل لذلك في جذور ذوات الأسماء الستة المتقدمة لكل واحد مثالٌ[١] يقاس عليه.

أمّا اختبار جذر الاسم الأول:

الذي هو اثنان وجذر ثلاثة، وجذره جذر واحد ونصف وجذر نصف، فإنا نضع الجذر المذكور في سطر وتحته مثله هكذا:

١ ١/٢	١/٢	ح ٣/٤	ح ٣/٤
ح ١ و ١/٢	ح و ١/٢		
ح ١ و ١/٢	ح و ١/٢		

(١) مثالٌ: مثالاً – خ – /.

ثم نضرب[١] جذر واحد ونصف في مثله بواحد ونصف، ثم نضرب[٢] جذر نصف في <جذر> نصف بنصف، ثم نجمع[٣] ذلك فيكون[٤] اثنين وهو الاسم الأكبر.

ولو أردنا ذلك بضرب الكسور، فبسط واحد ونصف ثلاثة، ومخرجه اثنان، وبسط النصف واحد ومخرجه اثنان، نضرب[٥] ثلاثة في ثلاثة بتسعة، نقسمها على أربعة، يخرج اثنان وربع وجذره واحد ونصف، ثم الخارج من ضرب النصف في النصف ربع، وجذره نصف، ومجموعهما اثنان، وهو الاسم الأكبر كما تقدم، وأما الاسم الأصغر فإنا نضرب كل قسم في منحرفه، ونجمع ذلك يعود الاسم الأصغر، فنضرب[٦] جذر واحد ونصف الأعلى في منحرفه الأسفل، وهو جذر نصف، يكون جذر/ ثلاثة أرباع، ثم نضرب[٧] جذر الواحد والنصف [٣٤و] الأسفل في منحرفه الأعلى، وهو جذر نصف، يكون[٨] جذر ثلاثة أرباع أيضًا، اجمعه للأول بطريق جمع الجذور، كما مر بأن تضرب البسط في البسط، أعني ثلاثة في ثلاثة بتسعة، وتقسمه على مسطح الإمام، يخرج أربعة أثمان ونصف ثمن، وجذره ثلاثة أرباع، تضعفه فيكون واحدًا ونصفًا[٩]، اجمعه لمجموع العددين، يحصل ثلاثة، ثم أوقع عليها الجذر، يكن جذر ثلاثة.

وإن شئت قلت جذري ثلاثة أرباع لأي عدد يكون جذرًا؟ فربع الاثنين واضربها في الثلاثة أرباع، يكن جذر ثلاثة كالأول، وذلك هو الاسم الأصغر فاجمع الاسمين بواو العطف، يحصل الاسم الأول من الستة بطريق الرد، وذلك اثنان وجذر ثلاثة هكذا: ٢ و ٣ͨ. والله أعلم.

---

(١) نضرب: ضربنا – خ – /.
(٢) نضرب: ضربنا – خ – /.
(٣) نجمع: جمعنا – خ – /.
(٤) فيكون: فكان – خ – /.
(٥) نضرب: ضربنا – خ – /.
(٦) فنضرب: فضربنا – خ – /.
(٧) نضرب: ضربنا – خ – /.
(٨) يكون: يكن – خ – /.
(٩) فيكون واحداً ونصفاً: يكن واحد ونصف – خ – /.

وأمّا اختبار الاسم الثاني :

الذي هو ثلاثة وجذر اثنا عشر ، وجذره جذر جذر ستة وثلاثة أرباع وجذر جذر ثلاثة أرباع ، فإنا نضع الجذر المذكور أيضًا في سطرين كما تقدم هكذا :

جـ ٦ ٣/٤		جـ ٣/٤
جـجـ ٦ ٣/٤	و	جـجـ ٣/٤
جـجـ ٦ ٣/٤	و	جـجـ ٣/٤

ثم ربع كما عرفت[١] ، بأن تضرب القسم الأول الأعلى في الأسفل ، يكن جذر[٢] ستة وثلاثة أرباع ، وكذلك القسم الثاني الأعلى في الأسفل بجذر ثلاثة أرباع ، كما[٣] عرفت ، / أن ضرب الجذر في مثله ، أعني تربيعه ، بإزالة جيم ، [٣٤ظ] فيصير القسمين : جذر ستة وثلاثة أرباع وجذر ثلاثة أرباع ، فاجمعهما بطريق جمع الجذور يحصل الاسم الأكبر ، وهو جذر اثنا عشر ، وذلك بأن بسط ستة وثلاثة أرباع سبعة وعشرين ، وبسط ثلاثة الأرباع ثلاثة ومسطح البسطين : أحد وثمانون قسمناه على مسطح المخرجين ، وهو ستة عشر ، الخارج[٤] خمسة[٥] ونصف ثمن ، فتأخذ جذره ، بأن تقسم جذر بسطه ، وهو تسعة ، على جذر أمامه ، وهو أربعة ، يخرج اثنان وربع ، وهو الجذر ضعّفه[٦] ، يكن أربعة ونصف ، احمله على مجموع العددين ، وهو سبعة ونصف ، المجتمع اثنا عشر ، وجذره هو الاسم الأكبر ، وأما الأصغر فهو أن تضرب أحد القسمين في منحرف الآخر ، أعني تضرب جذر جذر ستة وثلاثة أرباع في جذر جذر ثلاثة أرباع ، يخرج جذر جذر : واحد ونصف ، وأيضًا من القسم الثاني في منحرفه كذلك ، ومجموعها أبدًا

---

(١) كما عرفت: مكررة – خ –/.

(٢) يكن جذر: يكون بجذر – خ –/.

(٣) كما: لما – خ –/.

(٤) الخارج: للخارج – خ –/.

(٥) خمسة: خمسة أثمان – خ –/.

(٦) ضعّفه: اضعفه – خ –/.

ثلاثة ، وهو القسم الأصغر ، فاجمعهما يكن الاسم الثاني : ٣ و حـ ١٢ والله اعلم .

وأما اختبار الاسم الثالث :

[٣٥و] وهو جذر ثمانية وجذر ستة ، وجذره جذر جذر أربعة ونصف / وجذر جذر نصف ، فضعه في سطرين هكذا :

حـ ٤ ١/٢	حـ ١/٢	٢	١/٤ ٢ ١/٤
حـ ٤ ١/٢		حـ ١/٢	
حـ ٤ ١/٢		حـ ١/٢	

كما عرفت ، ربعنا كل واحد من القسمين ، وجمعناهما بجمع الجذور ، فكان جذر ثمانية ، وهو القسم الأكبر ، وذلك أنا ضربنا بسط الأربعة والنصف ، وهو تسعة ، في بسط النصف ، وهو واحد ، وقسمنا الخارج على مسطح الإمامين ، وهو أربعة ، الخارج اثنان وربع ، جذره واحد ونصف ، وضعفه ثلاثة ، جمعناه لمجموع العددين ، وهو خمسة ، الحاصل ثمانية ، أوقعنا عليها الجيم ، فكان جذر ثمانية ، كما قدمنا ، وأما الأصغر فمسطح كل قسم في منحرفه اثنان وربع ، وجذره واحد ونصف ، فإذا جمعت الجذرين ، بجمع الجذور ، حصل جذر ستة .

وإن شئت قلت : جذرا واحد ونصف لأي عدد يكون جذرًا؟ فاضرب الأربعة في واحد ونصف ، يكن جذر ستة ، وهو الاسم الأصغر .

وأمّا اختبار الاسم الرابع :

الذي هو ستة وجذر أربعة وعشرين ، وجذره ثلاثة وجذر ثلاثة مأخوذا جذره وثلاثة إلا جذر ثلاثة مأخوذًا جذر الباقي ، فضعه في سطرين على العادة هكذا :

$3\ \sqrt{3}$	٩	$\sqrt{3}\ 3$ لا	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
$\sqrt{3\ \sqrt{3}}$	و	$\sqrt{3\ \text{لا}\ \sqrt{3}}$		
$\sqrt{3\ \sqrt{3}}$	و	$\sqrt{3\ \text{لا}\ \sqrt{3}}$		

ربعنا كل قسم منهما بإذهاب الجيم ، / والزائد بالناقص ، تبقى ثلاثة وثلاثة ، [٣٥ظ] جمعناهما فكان ستة ، وهو الاسم الأكبر ، وأمّا الاسم الأصغر فضربنا كل قسم في منحرفه فكان بعد إذهاب الزائد بالناقص تسعة ، جذرها ثلاثة ، ضعّفناها[1] فكان ستة ، فقلنا جذرا ستة لأي عدد يكون جذرا؟ فكان الاسم الأصغر جذر أربعة وعشرين جمعناهما بحرف العطف ، فكان ستة وجذر أربعة وعشرين ، وهو المجذور هكذا : ٦ و $\sqrt{٢٤}$. والله أعلم بالصواب .

وأمّا اختبار الاسم الخامس :

الذي هو اثنان وجذر خمسة ، وجذره جذر واحد وربع وجذر ربع مأخوذًا جذره ، وجذر واحد وربع إلا جذر ربع[2] مأخوذًا جذر الباقي ، فضعه كما تقدم هكذا :

$\sqrt{1\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{1\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$
$\sqrt{\sqrt{1\ \text{و}\ \frac{1}{4}}\ \sqrt{\frac{1}{4}}}$	و	$\sqrt{\sqrt{1\ \text{و}\ \frac{1}{4}}\ \text{و}\ \sqrt{\frac{1}{4}}}$	
$\sqrt{\sqrt{1\ \frac{1}{4}}\ \text{و}\ \sqrt{\frac{1}{4}}}$	و	$\sqrt{\sqrt{1\ \text{و}\ \frac{1}{4}}\ \text{و}\ \sqrt{\frac{1}{4}}}$	

(١) ضعّفناها: اضعفناها – خ – /. (٢) ربع: نصف – خ – / .

ثم تربع كل قسم، بزوال الجيم، فيكون جذر واحد وربع وجذر ربع[١] وجذر واحد وربع إلا جذر ربع[١]، فجمعناهما بجمع الجذور، بأن جمعنا العددين، فكان اثنين ونصفًا، بعد إذهاب الزائد بالناقص، وحفظناه ثم سطحناهما، بأن ضربنا بسط أحدهما وهو خمسة بخمسة وعشرين، وقسمنا الحاصل على مربع الإمام، وهو ستة عشر، فيكون خارج الضرب واحد وربع، / وجذره [٣٦و] كذلك، ضعفه اثنان ونصف، زدناه على مجموع العددين، أعني المحفوظ، فكان خمسة، أوقعنا عليه الجذر، فصار جذر خمسة، وهو الاسم الأكبر، وأمّا الأصغر فإنا نضرب كل قسم في منحرفه بطريق ضرب الكسور، أعني بسط الواحد والربع[٢] خمسة، والمخرج أربعة، ثم بسط الربع واحد ومخرجه أربعة، ثم نضرب[٣] خمسة في خمسة بخمسة وعشرين زائد، ثم نضرب[٣] الخمسة في الربع بخمسة ناقصة، ثم نضرب[٣] الربع الزائد في خمسة بخمسة زائد، ثم نضرب[٣] <الربع> الزائد في الربع الناقص بنصف ثمن ناقص، ثم نذهب[٤] الزائد بالناقص فيكون[٥] الباقي خمسة وعشرين زائدًا[٦] ونصف ثمن ناقصًا[٧]، نقسم[٨] الخمسة والعشرين على مسطح الإمامين، وهو ستة عشر، فيكون[٥] خارج القسمة واحد وأربعة أثمان ونصف ثمن زائد،ثم نقسم[٨] نصف الثمن على الإمامين أيضًا، فيكون[٥] الخارج نصف ثمن ناقص نطرحه[٩] من واحد وأربعة أثمان ونصف ثمن الزائد، وبطرح الجذور، وذلك بأن نجمع[١٠] العددين فيكون[٥] واحدًا[١١] وخمسة أثمان، نحفظه ونضرب[١٢] أحد العددين في الآخر، بأن نضرب[٣] بسط

---

(١) ربع: نصف – خ – /.

(٢) الربع: النصف – خ – /.

(٣) نضرب: ضربنا – خ – /.

(٤) نذهب: اذهبنا – خ – /.

(٥) فيكون: فكان – خ – /.

(٦) زائداً: زائد – خ – /.

(٧) ناقصاً: ناقص – خ – /.

(٨) نقسم: فقسمنا – خ – /.

(٩) نطرحه: طرحناه – خ – /.

(١٠) نجمع: جمعناه – خ – /.

(١١) واحداً: واحد – خ – /.

(١٢) نحفظه ونضرب: فحفظناه وضربنا – خ – /.

نصف الثمن، وهو واحد، في بسط واحد وأربعة أثمان ونصف ثمن، وذلك خمسة وعشرين، الخارج خمسة وعشرون، نقسم[1] جذره، وهو خمسة، على جذر الإمام، وهو أربعة، فيكون[2] الخارج من القسمة: ثمنين ونصف ثمن / نضعفه [٣٦ظ] فيكون[3] خمسة أثمان، نطرحه[4] من المحفوظ الباقي، واحد، نأخذ[5] جذره بواحد، ونضعفه فيكون[6] اثنين عددا، وهو الاسم الأصغر، نجمع[7] الأكبر والأصغر بحرف العطف، فيكون[2] الاسم الخامس: اثنين وجذر خمسة هكذا:

٢ و ح ٥ ، والله أعلم.

وأما اختبار الاسم السادس:

الذي هو جذر اثنين وجذر ثلاثة، وجذره جذر ثلاثة أرباع ونصف مأخوذًا جذره وجذر ثلاثة أرباع إلا نصف مأخوذًا جذر الباقي فوضعناه في سطرين هكذا:

ح ح ٣/٤ و ١/٢	و	ح ح ٣/٤ لا ١/٢

ثم ربعنا كل واحد من القسمين بزوال الجيم، كما عرفت، وأذهبنا الزائد بالناقص، وجمعنا الباقي فكان واحدًا ونصفًا حفظناه ثم ضربنا أحد القسمين في الآخر، بضرب الكسور، وجمعنا خارج الضرب، بعد إذهاب الزائد بالناقص، فكان ثلاثة أرباع، وذلك بأن ضربنا البسط في البسط، وهو ثلاثة في ثلاثة بتسعة، وقسمنا جذر البسط على جذر الإمام، وهو أربعة، الخارج ثلاثة أرباع، بعد أن ربعنا النصف وأذهبنا الزائد بالناقص، ثم جمعنا خارج الضرب إلى المحفوظ، بعد أن

---

(١) نقسم: فقسمنا – خ –/.
(٢) فيكون: فكان – خ –/.
(٣) نضعفه فيكون: اضعفناه فكان – خ –/.
(٤) نطرحه: طرحناه – خ –/.
(٥) نأخذ: أخذنا – خ –/.
(٦) ونضعفه فيكون: واضعفناه فكان – خ –/.
(٧) نجمع: جمعنا – خ –/.

ضعفناه[١] ، فكان المجموع ثلاثة ، أوقعنا عليه الجذر ، فكان جذر ثلاثة ، وهو الاسم الأكبر . وأما <الاسم> الأصغر ، فإنا نضرب كلا من القسمين في منحرف [٣٧و] الآخر ، بطريق ضرب الكسور ، فبسط الأول/ ثلاثة ومخرجه أربعة ، وبسط مربع النصف واحد ومخرجه أربعة ، والقسم الثاني كذلك ثم ضربنا ثلاثة في ثلاثة بتسعة مقسومة على ستة عشر ، الخارج[٢] أربعة أثمان ونصف ثمن زائد ، ثم ضربنا ثلاثة في بسط مربع النصف ، وهو واحد ، بثلاثة مقسومة على ستة عشر بثمن ونصف ثمن ناقص ، ثم ضربنا بسط مربع النصف الزائد في ثلاثة ، وقسمنا الخارج على ستة عشر فكان خارج القسمة ثمن ونصف ثمن زائد ، ثم ضربنا بسط مربع النصف الزائد في بسط مربع النصف الناقص الخارج واحد تقسمه على ستة عشر ، الخارج نصف ثمن ، ثم أذهبنا الزائد بالناقص ، فكان أربعة أثمان ونصف ثمن إلا نصف ثمن ، فتطرح المستثنى ، وهو نصف الثمن ، من الزائد الذي هو أربعة أثمان ونصف ثمن ، بطريق طرح الجذور ، وهو أن تجمع الاسمين ، وذلك خمسة أثمان ، فاحفظه ، ثم تضرب أحدهما في الآخر ، تخرج تسعة ، اقسمها على ستة عشر ثم على ستة عشر ، الخارج [٢] ثمن ونصف ثمن ، ضعفناه[١] فكان ثلاثة أثمان طرحناه من المحفوظ ، وهو خمسة أثمان الباقي ثمنان ، وهو ربع ، أخذنا جذره بنصف ، وكذلك العمل في المنحرف الآخر يكون نصفًا ، ثم تجمع ذلك بجمع الجذور ، وذلك بأن تجمع [٣٧ظ] العددين ، فيكون واحدًا ، وهو المحفوظ ، ثم سطحناهما فكان ربعًا ، وجذره/ نصف ، ضعفناه[١] فكان واحدًا جمعناه إلى المحفوظ ، فكان المجتمع اثنان ، أخذنا جذره ، بأن أوقعنا الجذر عليه ، فصار جذر اثنين ، وهو الاسم الأصغر ، وإذا جمعنا بين الأكبر والأصغر بحرف العطف ، كان هو الاسم السادس : جذر اثنين وجذر ثلاثة ، وهو المجذور هكذا : حـ٢ و حـ٣ ، والله تعالى أعلم بالصواب .

❁❁❁

(١) ضعفناه: اضعفناه – خ – /.

(٢) الخارج: للخارج – خ – /.

الخاتمة

في

معرفة أعمال الكعوب

من استخراج مكعباتها وذوات أسمائها وفي ضربها وقسمتها وجمعها وطرحها، واستخراج الكعوب من مكعباتها، وأخذ كعوب متصلاتها ومنفصلاتها منطقها وأصمها، وتشتمل على مقدمة وفصول أربعة[1] :

---

(١) أربعة: أربع - خ -/.

المقدمة

اعلم أنه لما انتهينا من أعمال الجذور الصم بالتصرف بمجذوراتها بأسهل عبارة وأقرب إشارة ، رأينا أعمال الكعوب يتصرف فيها أيضًا بمكعباتها على نسق ما تقدم لنا من أعمال الجذور ، إلا في الجمع والطرح ، فإن لهما عملٌ خاص بهما ، فالمناسب[١] أن تلحق / أعمالها تلو أعمال الجذور في هذه الخاتمة ، ونتبع في تقريرها [٣٨و] ما هو عادتنا من تقريب مفهوم العبارة ، وتسهيل طرق الإشارة من غير تطويل ممل ولا تقصير مخل . فنقول والله أعلم : إن الكعب ، ويسمى الضلع ، هو أحد ثلاثة أضلاع متساوية ، يكون من مسطحها مكعب ذلك الكعب ، فإذا فرضنا : اثنين واثنين واثنين هكذا : ٢ ٢ ٢ ، وضربنا الأول في الثاني وما خرج في الثالث ، فيكون ثمانية ، وهو مكعب الاثنين ، والاثنين هو كعب الثمانية ، وصورة كتابتها هكذا : ٨ .

فعلى هذا يكون الخارج من ضرب العدد في مربعه ، أو المربع في جذره مكعبًا ، وذلك الجذر كعبًا ، فإذن المكعب[٢] : مجسم ذو أبعاد ثلاثة متساوية ، والكعب واحد تلك الأبعاد ، فمنه ما يكون كعبه عددًا صحيحًا ككعب ثمانية ، فإن كعبه اثنان ، ومنه ما يكون كسرًا ككعب النصف ، فإن كعبه ثُمنًا ، ومنه مايكون صحيحًا وكسرًا ككعب ثلاثة وثلاثة أثمان ، فإن كعبه واحد ونصف .

فإذا علم ذلك وقيل لك مكعب خمسة ، أي عدد يكون؟ أو خمسة كعب لأي عدد يكون؟ أو خمسة لأي عدد يكون كعبًا؟ أو ما مكعب خمسة؟ فالجواب عن كلها : مائة وخمسة وعشرون .

وذلك لأن ضرب الخمسة في مثلها والخارج في الخمسة/ مائة وخمسة [٣٨ظ] وعشرون ، وهو العدد الذي كعبه خمسة ، وهذه[٣] صورة كتابتها : ١٢٥ .

---

(١) فالمناسب: كلمة غير واضحة – خ – /. (٢) المكعب: الكعب – خ – /.

(٣) وهذه: وهذا – خ – /.

فإن قيل : كعبا ثمانية أو ضعف كعب ثمانية لأي عدد يكون كعبًا؟ أقول هذه المسألة وما شابهها من التضعيف والتنصيف والتكرار والتجزئة وغير ذلك ، الطريق في عملها أن تكتب ما يقال لك من التضعيف أو التنصيف أو غير ذلك ، ثم تضرب ما خرج لك من التكعيب في العدد المسمى مكعبًا[١] ، خارج الضرب هو المطلوب .

ففي هذا المثال المذكور مكعب الاثنين ، أي تثنية كعب ثمانية : ثمانية ، وضرب ثمانية في ثمانية : أربعة وستون ، وكعبها المطلوب ، وهو أربعة ، وصورته هكذا ك ٦٤ ، وكعبه المنطق هو الجواب .

ولو قيل : ثلاثة[٢] كعوب سبعة لأي عدد يكون كعبًا؟ فكعب الثلاثة سبعة وعشرون ، وضرب ذلك في السبعة : مائة وتسعة وثمانون ، هكذا : ك ١٨٩، وهو الجواب .

فإن قيل : ستة عشر كعبه ونصف كعبه لأي عدد يكون كعبًا؟ فهو أن تكعب الواحد والنصف ، يكون[٣] ثلاثة وثلاثة أثمان ، وتضرب ذلك في الستة عشر يكون[٤] أربعة وخمسين ، وكعبها المطلوب ، وهذا صورة ذلك : ك ٥٤ .

[٣٩و] **ولو قيل** : نصف / كعب اثنين وسبعين لأي عدد يكون كعبًا؟ فهو أن تكعب النصف ، فيكون[٥] ثمنًا ، واضربه في الاثنين والسبعين ، تكن تسعة ، وكعبها المطلوب هكذا : ك ٩ . وعلى هذا القياس في جميع مايرد عليك .

وأما إذا قيل : كعب تسعين لأي عدد يكون ثلاثة[٦] أمثالٍ؟ أو ثلث كعب تسعين لأي عدد يكون كعبًا؟ هاتين العبارتين مؤداهما[٧] واحد وجوابهما كذلك ،

---

(١) مكعباً: مكعب – خ – /.
(٢) ثلاثة: ثلاث – خ – /.
(٣) يكون: يكن – خ – /.
(٤) يكون: يكن – خ – /.
(٥) فيكون: يكن – خ – /.
(٦) ثلاثة: ثلاث – خ – /.
(٧) مؤداهما: مؤداتهما – خ – /.

ولنا طريقان في حساب ذلك على حسب العبارتين:

الأولى بطريق القسمة: وهو أن تقسم الواحد على الثلاثة فيكون[١] ثلثا، ومكعب الثلث ثلث تسع، وضربه في العدد المضاف، أعني التسعين، ثلاثة وثلث، وكعبه المطلوب، فكعب التسعين إذًا[٢] ثلاثة أمثال كعب ثلاثة وثلث، وكعبه المطلوب.

والطريق الثانية بالضرب: وهو أن تكعب الثلث بثلث تسع، وتضربه في العدد المسمى وهو التسعون، فيكون كالأول، وهو ثلاثة وثلث، وذلك مكعب ثلث كعب تسعين، وكعبه المطلوب، وصورته[٣] هكذا:

ك
٣ و $\frac{١}{٣}$.

ولو قيل: ثلاثة أمثال كعب عشرة لأي عدد يكون كعبًا؟ أو كعب عشرة ثلث لأي عدد يكون؟ هذه المسألة عكس المتقدمة وعملها كالتي قبلها، إن شئت ضربت مكعب[٤] الثلاثة في العشرة أو قسمت/ الواحد على الثلث بثلاثة، [٣٩ظ] وضربت مكعبها في العشرة، فالجواب فيها: يكون كعب مائتين وسبعين هكذا:

ك
٢٧٠ . فقس.

وإذا أردت أن يكون تعداد الكعوب بعضًا لعدد أو عكسه، فاعمل على انفراده كما عرفته، واحفظ كلا منهما، ثم اضرب مسطحهما في العدد المسمى، يكون كعبًا[٥] لأي عدد، يكون الخارج[٦] هو المطلوب.

فلو قيل: ثلاثة كعوب سبعة يكون نصفًا لأي عدد يكون؟ أو ستة كعوب سبعة لأي عدد يكون كعبًا؟

فعلى العبارة الأولى: مكعب الثلاثة سبعة وعشرون محفوظة، ثم قسمنا الواحد

---

(١) فيكون: يكن – خ –/.
(٢) إذاً: اذن – خ –/.
(٣) وصورته: وصوره – خ –/.
(٤) مكعب: لمكعب – خ –/.
(٥) كعباً: كعب – خ –/.
(٦) الخارج: للخارج – خ –/

على نصف فكان اثنين ، مكعبه ثمانية محفوظة ، مسطح المحفوظين مائتين وستة عشر مضروبة في العدد المسمى ، يكون[1] اثني عشر وخمسمائة وألفًا ، وكعبه المطلوب .

وعلى العبارة الثانية : مكعب الستة مائتين وستة عشر مضروبة في السبعة ، الخارج كالأول ، وصورته هكذا : ك ١٥١٢ .

فلو قيل : نصف كعب ألف وخمسمائة واثني عشر ثلاثة أمثال أي عدد يكون؟ أو كعب ألف وخمسمائة واثني عشر ستة أمثال أي عدد يكون؟

[٤٠و] **فعلى العبارة الأولى** : مكعب النصف ثمن تحفظه ومكعب خارج / قسمة الواحد على الثلاثة ثلث تسع تحفظه ، ومسطح المحفوظين ثلث ثمن تسع ، تضربه في المسمى فيكون[2] سبعة ، وكعبها هو المطلوب .

وعلى العبارة الثانية : مكعب السدس : <سدس> سدس السدس مضروب في العدد المسمى ، يكون[3] كالأول على هذه الصورة : ك ٧ ، والله أعلم .

❁❁❁

(١) يكون: يكن – خ – /.
(٢) فيكون: يكن – خ – /.
(٣) يكون: يكن – خ – /.

الفصل الأول

في ضرب الكعوب

وهو أن تضرب أحد العددين في الآخر، وما خرج فكعبه المطلوب.

مثاله: اضرب كعب سبعة في كعب خمسة، فضربنا خمسة في سبعة بخمسة وثلاثين، فكعب خمسة وثلاثين هو المطلوب، وصورة كتابته هكذا: $\overset{\text{ك}}{\overline{\text{٣٥}}}$.

ولو قيل: اضرب اثنين في كعب ستة، فاضرب الستة في مكعب الاثنين تكن[١] ثمانية وأربعين، وكعبها هو المطلوب هكذا: $\overset{\text{ك}}{\overline{\text{٤٨}}}$.

ولو قيل: اضرب كعبي اثنين في كعب ثلاثة، فاضرب مكعب الاثنين، أعني عدد تكرار الكعب، وهو ثمانية، في اثنين، بستة عشر، فاضربه في ثلاثة يخرج ثمانية وأربعين، وكعبه هو المطلوب. وهذه صورته: $\overset{\text{ك}}{\overline{\text{٤٨}}}$.

ولو عكست بأن ضربت كعبي ثلاثة في كعب اثنين لكان كالأول، لأنك تضرب مكعب الاثنين، عدد تكرار الكعب، وهو ثمانية، في ثلاثة / تكون[٢] [٤٠ظ] أربعة وعشرين مضروبة في الاثنين، فيكون[٣] الخارج: ثمانية وأربعين، وكعبه هو المطلوب كالأول.

ولو قيل: اضرب كعبي اثنين في ثلاثة[٤] كعوب ثلاثة، فنقول: كعبي اثنين لأي عدد يكون كعبًا؟ فتجده ستة عشر وثلاثة كعوب ثلاثة، هو كعب واحد وثمانين، ثم اضرب الستة عشر في الواحد والثمانين، يكن ألفًا ومائتين وستة وتسعين وكعبها المطلوب، وصورته[٥] هكذا: $\overset{\text{ك}}{\overline{\text{١٢٩٦}}}$.

---

(١) تكن: تكون - خ - /.
(٢) تكون: تكن - خ - /.
(٣) فيكون: يكن - خ - /.
(٤) ثلاثة: ثلاث - خ - /.
(٥) صورته: صورتها - خ - /.

وإن قيل : اضرب نصف كعب أربعة في ثلاثة[١] كعوب خمسة ، فاعمل كما عرفت ، بأن تضرب مكعب النصف في أربعة يكن نصفًا فتحفظه ، ومضروب مكعب ثلاثة [١] كعوب في خمسة : مائة وخمسة وثلاثين فتحفظه ، ومسطح المحفوظين سبعة وستون ونصف ، وكعب ذلك هو المطلوب ، وهذه صورته :



وعلى هذا فقس والله أعلم .

❁❁❁

(١) ثلاثة: ثلاث - خ - /.

الفصل الثاني

في القسـمة

وهو أن تقسم المقسوم على المقسوم عليه، وكعب الخارج من القسمة هو المطلوب.

فإذا قيل: اقسم كعب سبعة على كعب عشرة.

فقياسه: أن تقسم السبعة على العشرة، تخرج سبعة أعشار، وكعبها المطلوب هكذا:

$$\overline{\frac{٧}{١٠}}^{\text{ك}}$$

ولو قيل: اقسم كعب عشرين على كعب ثلاثين، فاقسم العشرين على الثلاثين يكن الخارج / ثلثين، وكعبه المطلوب هكذا: [٤١و]

$$\overline{\frac{٢}{٣}}^{\text{ك}}$$

وإن قيل: اقسم لنا كعب ستة على كعب اثنين، فاقسم الستة على الاثنين، يكن الخارج ثلاثة، وكعبها المطلوب هكذا:

$$\overline{٣}^{\text{ك}}$$

ولو قيل: اقسم نصف كعب ستة عشر على كعب أربعة، فاقسم اثنين على أربعة يكن نصفًا، وكعبها المطلوب هكذا:

$$\overline{\frac{١}{٢}}^{\text{ك}}$$

ولو قيل: اقسم كعب عشرة على ثلث كعب أربعين وخمسمائة، فثلث كعب

أربعين وخمسمائة كعب عشرين ، فاقسم العشرة على العشرين يكن نصفًا ، وصورتها

ك

١
―
٢

وقس على ذلك ، والله أعلم بالصواب .



الفصل الثالث

في جمع الكعوب وطرحها

اعلم أنه لا يمكن جمع كعب مع كعب حتى يصيرا كعب عدد واحد، ولا طرح كعب من كعب حتى يصير الباقي كعب عدد واحد، إلا إذا كان بين الكعبين اشتراك، أعني تكون نسبة أحدهما إلى الآخر كنسبة عدد مكعب إلى عدد مكعب، لأن النسبة بين كل مكعبين متواليين أو غير متواليين مكعبة.

ومعرفة الاشتراك: أن تقسم أحدهما على الآخر أو تضرب أحدهما في مربع الآخر، فإن كان خارج القسمة أو الضرب مكعبًا، أمكن الجمع بينهما وأمكن طرح الأقل من الأكثر، وإلا فلا، وإذا أمكن:

فطريق العمل: أن تزيد(1) / الواحد على كعب الخارج من قسمة أحدهما [٤١ظ] على الآخر إن أردت الجمع، وإلا فأسقط الواحد منه، ثم كعب المجتمع أو الباقي، واضربه في المقسوم عليه، فما كان فكعبه المطلوب.

طريق آخر: اضرب مكعب الأكبر في مربع مكعب الأصغر، وزد ثلاثة أمثال كعب الخارج على مكعب الأكبر، يحصل المحفوظ الأول، وافعل كذلك بالأصغر بأن تضرب مكعب الأصغر في مربع مكعب الأكبر، وزد ثلاثة أمثال كعب الخارج على مكعب الأصغر يحصل المحفوظ الثاني، ثم إن جمعت المحفوظين حصل مكعب مجموعهما، أو أخذت الفضل حصل مكعب الفضل بينهما، ومما يغنيك عن أخذ ثلاثة أمثال كعب الخارج، أن تضرب الخارج في مكعب الثلاثة، أعني سبعة وعشرين، ثم كعب الخارج مرة واحدة، وزده كما تقدم، وكمل العمل، يحصل المطلوب، والله أعلم.

---

(١) تزيد: تزد – خ – /.

تنبيه:

متى كان في المقسومين أو أحدهما تكرار أو تجزئة، فاضرب ما مع المقسوم في كعب خارج القسمة، وما مع المقسوم عليه في الواحد، ثم/ اضرب مكعب [٤٢و] المجموع في المقسوم عليه، يحصل مكعب المطلوب، لأن نسبة الواحد من كعب خارج القسمة كنسبة المقسوم عليه من كعب المقسوم، والله أعلم.

مثال ذلك: تريد أن تجمع كعب اثنين وثلاثين إلى كعب أربعة، قسمنا الاثنين والثلاثين على أربعة، وزدنا على كعب الخارج واحدًا، ثم كعبنا المجتمع فكان سبعة وعشرين، ضربناه في المقسوم عليه، وهو أربعة، فبلغ مائة وثمانية وهو مكعب المطلوب ١٠٨ك، وهو مجموع كعب اثنين وثلاثين وكعب أربعة؛ وفي الطرح الباقي كعب أربعة، وهو المطلوب ٤ك.

وإن قيل: اجمع كعب سبعة وعشرين إلى كعب ثمانية، فإنا نضرب مربع الثمانية، وهو أربعة وستون في الآخر، وهو سبعة وعشرون، يكون[1] ألف وسبعمائة وثمانية وعشرين، وكعبه اثنا عشر، أخذناه ثلاث مرات لستة وثلاثين، ثم ضربنا مربع السبعة والعشرين، وهو سبعمائة وتسعة وعشرون في الآخر، وهو ثمانية، فيكون خمسة آلاف وثمانمائة واثنين[2] وثلاثين، وكعبه ثمانية عشر، أخذناه ثلاث مرات / بأربعة وخمسين، جمعناه إلى ستة وثلاثين، فكان تسعين، وهو المحفوظ، زدنا [٤٢ظ] عليه مجموع المكعبين، وهو خمسة وثلاثون[3]، فكان المجموع مائة وخمسة وعشرين[4] وكعبه المطلوب، وهو مجموع كعب ثمانية وكعب سبعة وعشرين.

وإن أريد **طرح** كعب ثمانية من كعب سبعة وعشرين، فإنك[5] تضرب مربع السبعة والعشرين في الثمانية، وتأخذ كعب الحاصل ثلاث مرات، يكون[6] أربعة

---

(١) يكون: يكن – خ – /. (٢) واثنين: اثنين – خ – /.
(٣) وثلاثون: ثلاثون، فكان المجموع مائة وخمسة وثلاثون – خ – /.
(٤) وعشرين: وعشرون – خ – /. (٥) فإنك: فانا – خ – /.
(٦) يكون: يكن – خ – /.

وخمسين ، زدنا عليه الأصغر ، وهو الثمانية ، بلغ اثنان وستون ، وهو المحفوظ ، ثم ضربنا مربع الثمانية في سبعة وعشرين ، وأخذنا كعب الخارج ثلاث مرات ، وهو ستة وثلاثون ، زدنا عليه السبعة والعشرين ، بلغ ثلاثة وستون ، أسقطنا من ذلك المحفوظ ، فكان الباقي واحدًا ، وكعبه هو المطلوب هكذا : ك ١ ، وذلك هو الباقي من طرح كعب ثمانية من كعب سبعة وعشرين ، والله أعلم .

ولو قيل : اجمع كعبي أربعة وعشرين إلى ثلاثة[١] كعوب ثلاثة ، فاقسم الأربعة والعشرين على الثلاثة ، الخارج ثمانية ، وكعبها / اثنان ، ضربناه في عدد تكرار مافي [٤٣و] المقسوم من الكعوب ، وهو اثنان ، خارج الضرب أربعة ، ثم ضربنا عدد ما في المقسوم عليه من تكرار الكعوب في الواحد ، فكان ثلاثة ، فجمعناه إلى الأربعة وأخذنا كعب المجتمع ، وهو ثلاثمائة وثلاثة[٢] وأربعون ، ضربناه في المقسوم عليه ، وهو ثلاثة ، فخرج مكعب المطلوب ، وهو ألف وتسعة وعشرون ، هكذا :

ك
١٠٢٩

وكذا : لو قسمنا الثلاثة على الأربعة والعشرين ، لكان الخارج ثمنًا ، ومكعبه نصف ضربناه في عدد تكرار ما مع المقسوم من الكعاب ، وهو ثلاثة ، فكان واحدًا ونصفًا ، ثم ضربنا عدد تكرار ما مع المقسوم عليه من الكعوب في الواحد ، فكان اثنين ، جمعناهما فكان ثلاثة ونصفًا ، ثم ضربنا مكعب ذلك ، وهو اثنان وأربعون وسبعة أثمان في المقسوم عليه ، وهو الأربعة والعشرون ، فكان مكعبه ألفًا وتسعة وعشرين كالأول ، والله أعلم .

وإن شئت قلت كعبي أربعة وعشرين لأي عدد يكون كعبًا؟ فتجده مائة واثنين وتسعين ، ثم تفعل كذلك لثلاث كعاب الثلاثة ، فتجده أحدًا وثمانين ، فإذا فعلت ذلك فكأنه قيل لك : نريد أن تجمع كعب اثنين وتسعين ومائة إلى كعب أحد وثمانين ، فافعل كما تقدم لك ، بأن تضرب ١٩٢ في مربع أحد وثمانين ، وهو

---

(١) ثلاثة: ثلاث – خ – /.

(٢) وثلاثة: ثلاثة – خ – /.

[٤٣ظ] ستة آلاف وخمسمائة وأحد وستين[١]،/ فيكون الخارج من الضرب ألف ألف ومائتي ألف وتسعة وخمسين ألفـًا وسبعمائة واثني[٢] عشر هكذا: ١٢٥٩٧١٢[٣]، وكعبه ١٠٨ [٤]، جمعناه ثلاث مرات، فكان أربعة وعشرين[٥] وثلاثمائة، ثم ضربنا أحدًا وثمانين في مربع اثنين وتسعين ومائة، وهو ٣٦٨٦٤ فكان ٢٩٨٥٩٨٤ ، ومكعبه ١٤٤ ، جمعناه ثلاث مرات، فكان ٤٣٢ ، ثم جمعنا الست كعاب فكان ستة وخمسين وسبعمائة، وهو المحفوظ، زدنا عليه مجموع المكعبين وذلك ٢٧٣ ، فكان مكعب المطلوب تسعة وعشرين وألف هكذا: ١٠٢٩ كالأول، والله أعلم .

ولو قيل: اجمع ثلث كعب ثمانية وأربعين إلى نصف كعب ستة، فإن شئت قسمت ثمانية وأربعين على الستة، وأخذت كعب الخارج وهو اثنان، وقد علمت أن نسبة الواحد إليه كنسبة كعب المقسوم عليه إلى كعب المقسوم، فالمقسوم مثلا كعب المقسوم عليه، الذي هو الستة، وقد فرضنا ثلث كعب ثمانية وأربعين، فتأخذ ثلث الاثنين، فيكون ثلثين، يحمل عليها مضروب النصف، الذي هو نصف كعب ستة، في الواحد فيكون نصفًا[٦]، وتكون الجملة واحدًا وسدسًا، أخذنا

[٤٤و] كعبه فنجده واحدًا وثلاثة أسداس وثلاثة أسداس السدس/ وسدس سدس السدس هكذا: ١و $\frac{٣\ ٣\ ١}{٦\ ٦\ ٦}$ ، فاضرب ذلك في المقسوم عليه، وهو ستة، يكن المطلوب كعب تسعة وثلاثة أسداس وسدس السدس هكذا:

$$\text{٩ و } \frac{\overline{\text{٣ ١}}^{\text{ك}}}{\text{٦ ٦}}.$$

وإن شئت قسمت الستة على الثمانية والأربعين يخرج ثمن وكعبه نصف، فضربنا فيه ما مع المقسوم من الأجزاء، وهو النصف، فكان ربعًا، ثم ضربنا ما مع

---

(١) ستين: ستون – خ – /.
(٢) واثني: وثمانية – خ – /.
(٣) ١٢٥٩٧١٢ : ١٢٥٩٧١٨ – خ – / .
(٤) ١٠٨ : ١٠٥ – خ – / .
(٥) وعشرين: وثلاثين – خ – /.
(٦) فيكون نصفاً: يكن نصف – خ – /.

المقسوم عليه من الأجزاء في الواحد ، فكان ثلثًا جمعناهما فكان ثلثًا وربعًا ، فإذا ضربنا مكعبه في المقسوم عليه ، خرج كالأول .

وإن شئت قلت : نصف كعب ستة لأي عدد يكون؟ فتجده كعب ثلاثة أرباع ، وتجد الآخر كعب واحد وسبعة أتساع ، فاجمع ذلك على ما تقدم ، يكن كالأول ، والله أعلم .

ولو قيل : اجمع كعبي ثلاثة إلى نصف كعب أحد وثمانين ، فاقسم واحدًا وثمانين على ثلاثة ، يخرج سبعة وعشرون ، وكعبها ثلاثة ، ومعلوم مما تقدم أن كعب واحد وثمانين(١) ثلاثة أمثال كعب ثلاثة ، وفرضنا من كعب واحد وثمانين نصفه ، وهو واحد ونصف ، احمل إليه اثنين ، وهما عددا كعبي الثلاثة ، تكن ثلاثة ونصفًا ، كعبها اثنان وأربعون وسبعة أثمان ، ثم اضرب ذلك / في ثلاثة ، أعني المقسوم عليه ، يكن [٤٤ظ] ثمانية وعشرين ومائة وخمسة أثمان ، وهو مكعب المطلوب هكذا :

ك
١٣٨ و $\frac{٥}{٨}$

فإن قيل لك : اجمع <كعب> أربعة وعشرين إلى كعب أربعة ، فاعلم أن هذين الكعبين لا يجتمعان ولا يسقط الأقل من الأكثر .

ولو قيل : اطرح كعب تسعة من ثلاثة أرباع كعب اثنين وسبعين ، فاقسم اثنين وسبعين على تسعة ، تخرج ثمانية ، وكعبها اثنان ، وهو مثلا كعب التسعة ، وقد فرضنا طرح كعب التسعة من ثلاثة أرباع كعب اثنين وسبعين ، فاطرح واحدًا من واحد ونصف ، يبق(٢) نصف كعبه ، ويكن(٣) ثمنًا ، اضربه في التسعة ، يكن واحدًا وثمنًا ، وكعبه هو المطلوب ، وهذه(٤) صورته :

ك
١ و $\frac{١}{٨}$

---

(١) وثمانين: وثمانون – خ – /.

(٢) يبق: يبقى – خ – /.

(٣) ويكن: يكن – خ – /.

(٤) وهذه: وهذا – خ – /.

وإن شئت قسمت التسعة على اثنين وسبعين، يخرج ثمنًا، وكعبه نصف، وقد علمت أن كعب اثنين وسبعين مثلا كعب التسعة، فاطرح النصف من ثلاثة الأرباع يبق[1] ربع كعبه، ويكن[2] ثمن ثمن، اضربه في الاثنين والسبعين، يخرج واحد وثمن، وكعبه المطلوب كما تقدم، فقس على ما أوضحنا، تصب[3] إن شاء الله تعالى.

تنبيه:

اعلم أن كل عدد فرض، وقسم بقسمين، فإن مجموع ضرب كل واحد من القسمين في مربعه/ ومسطحي[4] أحدهما في مربع الآخر ثلاث مرات هو مكعب العدد المفروض. [٤٥و]

مثاله: خمسة قسمناها بقسمين: ثلاثة واثنين، ضربت الثلاثة في مربعها فكان سبعة وعشرين، ثم ضربنا الاثنين في مربعه بثمانية، ثم ضربنا مربع الثلاثة، وهو تسعة في الاثنين بثمانية عشر، وثلاثة أمثاله أربعة وخمسين، ثم ضربنا مربع الاثنين، وهو أربعة، في الثلاثة، باثني عشر وثلاثة أمثاله ستة وثلاثين، ومجموع ذلك كله ١٢٥، وهو مكعب الخمسة، أي العدد المفروض.

وكذا إن جمعت مكعبيها لمسطحي مربع كل قسم في ثلاثة أمثال الثاني حصل كذلك، ونمثله في المثال المذكور، مجموع مكعبيهما ٣٥، ومسطح مربع الاثنين في ثلاثة أمثال الثلاثة ٣٦، ومسطح مربع الثلاثة في ثلاثة أمثال الاثنين ٥٤، ومجموع ذلك جميعه ١٢٥، وهو مكعب الخمسة كما تقدم، والله تعالى أعلم بالصواب.

❁❁❁

---

(١) يبق: يبقى - خ -/.

(٢) ويكن: يكن - خ -/.

(٣) تصب: تصيب - خ -/.

(٤) مسطحي: مسطح - خ -/.

الفصل الرابع

في معرفة استخراج كعب العدد منطقه وأصمه: صحيحه وكسره

وقبل الخوض في ذلك، نقدم مقدمة نبين فيها رسم الكعب ومعرفة الأعداد المكعبة وغير المكعبة، / وكذلك مراتب العدد المنطقة والصماء[1]. [٤٥ظ]

اعلم: أن الكعب: هو طلب مقدار نسبة مكعبه إليه كنسبة مربعه إلى الواحد.

مثاله: نسبة ثمانية إلى اثنين[2] كنسبة أربعة إلى الواحد، أعني مكعب الاثنين: ثمانية، والثمانية: أربعة أمثال الاثنين، فكذلك تكون نسبة مربع الاثنين، وهو الأربعة، إلى الواحد أربعة أمثال الواحد، وقد تقدم في أول الخاتمة ما يزيدك وضوحًا.

واعلم أن العدد صنفان: مكعب وغير مكعب.

فالعدد المكعب إن كان فردًا أو زوجًا فكعبه كذلك.

وكل عدد مكعب: إذا كان في أوله واحد أو أربعة أو خمسة أو ستة، فإن في أول كعبه مثل ذلك.

أو كان في أوله سبعة كان في أول كعبه ثلاثة أو بالعكس.

أو كان < في أوله> ثمانية كان في أول كعبه اثنين أو بالعكس[3].

وإن كان في أوله تسعة فأول كعبه كذلك.

وإذا كان أوله ثلاثة أصفار فيكون أول كعبه صفرًا.

---

(١) والصماء: والأصمة - خ - /.
(٢) اثنين: الاثنين - خ - /.
(٣) أو كان .... بالعكس: مكررة - خ - /.

واعلم: أنَّ العدد إذا لم ينطرح بالسبعة ولم يفضل منه واحد ولا ستة.

[٤٦و] ولم ينطرح بالثمانية ولم يفضل[١] منه واحد ولا ثلاثة ولا / خمسة ولا سبعة، ولم ينطرح بتسعة ولم يبق منه واحد ولا ثمانية، فذلك العدد غير مكعب.

وإن كان غير ما ذكر فيمكن أن يكون مكعبًا.

ثم اعلم أن مرتبة الآحاد منطقة، أعني مكعبًا[٢]، والرابعة منها مكعب، ورابع الرابعة مكعب، وهكذا إلى ما لانهاية له. وعُلم أن المرتبتين اللتين بينهما أصمان، أعني غير مكعب، وإذا علم ذلك جميعه، وأردت استخراج كعب عدد مفروض.

فطريق ذلك:

- أن تضع العدد المطلوب كعبه بين سطرين متوازيين أعلى[٣] وأسفل،
- وعلم المراتب المنطقة بنقط تحتها بمنطق وأصمي[٤] منطق وأصمين،
- وسم سطر المنطق بسطر الوسط،
- ثم افرض عددًا ما وضعه على أعلى[٣] السطر فوق المرتبة المنطقة الأخيرة، ومثله تحت السطر الأسفل، ثم اضرب الأعلى[٥] في الأسفل، وضع حاصل الضرب في السطر الأوسط، ثم اضرب الأعلى في الأوسط، وأسقط الحاصل من العدد المكعب، كل مرتبة من نظيرتها مبتدئًا من المرتبة المنطقة الأخيرة، فإن فني فأثبت صفرًا، وإلا فأثبت الفاضل كل في مرتبته،
- [٤٦ظ] ثم ضعف[٦]/ الأسفل وأثبته مكانه، واضرب ذلك الضعف في الأعلى[٥]، ثم ما خرج زده على الأوسط وأثبته مكانه، ثم زد الأعلى[٥] على الأسفل، أي الضعف، وأثبت المجموع مكان الضعف،
- ثم تعود بنقل ما في الأوسط مرتبة واحدة إلى جهة اليمين،

---

(١) يفضل: ينطرح – خ – /.

(٢) مكعباً: مكعب – خ – /.

(٣) أعلى: اعلا – خ – /.

(٤) وأصمي: واصمين – خ – /.

(٥) الأعلى: الاعلا – خ – /.

(٦) ضعف: اضعف – خ – /.

- ثم افرض عددًا آخر وضعه فوق السطر الأعلى[١]على المرتبة المنطقة، التي هي بعد الآخرة من جهة اليمين، وكذا أسفلها.
- ثم اضرب جميع ما في السطر الأسفل في أول مراتب الأعلى، وزد على الحاصل ما في السطر الأوسط، كل مرتبة على ما يوازيها، وأثبته في السطر الأوسط، ثم اضرب هذا المثبت في أول أعداد السطر الأعلى[١]، فما كان أسقطه من العدد المكعب مبتدئًا من المرتبة المنطقة، فإن فني وإلا فأثبت الباقي في مكانه.
- ثم ضعف[٢] المرتبة الأولى من السطر الأسفل في مكانها، أي بأن تمحيها، وتثبت[٣] الضعف مكانها، ثم اضرب جميع ما في السطر الأسفل في أول مراتب السطر الأعلى[١]، وزد[٤] الحاصل على ما في السطر الأوسط، وأثبت كل مرتبة في مكانها، ثم زد أول مراتب الأعلى على أول مراتب السطر الأسفل، وأثبته مكانه ثم عد[٥] / لتنقل[٦] السطر الأوسط مرتبة إلى جهة اليمين، [٤٧و] والسطر الأسفل مرتبتين إلى جهة اليمين.
- ثم افرض عددًا وضعه فوق السطر الأعلى فوق المنطق الذي يلي ما تقدم من جهة اليمين وأسفلها، ثم افعل ما تقدم من العمل يحصل كعب العدد في السطر الأعلى وهو المطلوب.

مثال ذلك:

أردنا كعب عدد أحد وأربعين ألف ألف وثلاثة وستين ألفًا وستمائة وخمسة[٧] وعشرين.

فوضعناه بين سطرين وعلمنا المراتب المنطقة بأصفار تحتها، على هذه الصورة:

---

(١) الأعلى: الاعلا – خ –/.
(٢) ضعف: اضعف – خ –/.
(٣) وتثبت: وثبت – خ –/.
(٤) وزد: وتزد – خ –/.
(٥) عد: تعود – خ –/.
(٦) لتنقل: تنقل – خ –/.
(٧) وخمسة: خمسة – خ –/.

	٣						
٤	١	٠	٦	٣	٦	٢	٥
	٩			٠			٠
	٣						
	٩						

ثم فرضنا عدد ثلاثة ، وأثبتناه أعلى[١] السطر الأعلى[٢] فوق المرتبة المنطقة الأخيرة وأسفل الخط أيضًا ، ثم ضربنا الأعلى في الأسفل ، فكان تسعة أثبتناها في السطر الأوسط ، ثم ضربنا هذا المثبت في الأعلى فكان ٢٧ ، أسقطنا ذلك من العدد من المرتبة المنطقة ، فكان الباقي أربعة عشر ، فأثبتناها مكان الأحد والأربعين ، ثم ضعفنا[٣] الثلاثة السفلى ، فكانت ستة ، فضربناها في العليا ، فكان ثمانية عشر/ زدنا ذلك على السطر الأوسط ، وهو تسعة ، فكان سبعة وعشرين ، [٤٧ظ] فأثبتناها في الأوسط مكان التسعة ، ثم زدنا الأعلى على < ضعف> الأسفل ، فكان تسعة ، فأثبتناها في الأسفل[٤] مكان ما قبلها .

ثم حولنا الأوسط مرتبة إلى جهة اليمين ، والسطر الأسفل مرتبتين إلى جهة اليمين ، ثم فرضنا عددًا ووضعناه فوق المرتبة المنطقة التي تلي الأخيرة من جهة اليمين وأسفلها ، وهي[٥] أربعة على هذه الصورة :

	٣			٤			
١	٤	٠	٦	٣	٦	٢	٥
	٢	٧		٠			٠
			٩	٤			
				٨			

ثم ضربنا أول مراتب الأعلى ، وهو أربعة ، في جميع مراتب الأسفل ، وهو أربعة وتسعون ، فكان الحاصل ٣٧٦ ، زدناه على ما في السطر الأوسط ، وهو ٢٧٠٠ ،

(١) أعلى: اعلا- خ - /.
(٢) الأعلى: الاعلا - خ - /.
(٣) ضعفنا: أضعفنا - خ - /.
(٤) في الأسفل: اسفل - خ - /.
(٥) وهي: وهو - خ - /.

فكان المجتمع ٣٠٧٦ فأثبتناه في السطر الأوسط ، ثم ضربنا هذا المثبت في أول مراتب الأعلى وهو ٤ ، فكان الخارج ١٢٣٠٤ ، أسقطنا ذلك من سطر العدد وأول ذلك : المرتبة المنطقة التي هي تحت الأربعة ، فكان الفاضل ١٧٥٩ ، فوضعنا ذلك في مراتبه ، ثم ضعفنا[١] أول مراتب الأسفل فكان ثمانية ، وأثبتناها مكان الأربعة ، ثم ضربنا جميع مراتب الأسفل وهو ٩٨[٢] في أول مراتب/ السطر [٤٨و] الأعلى ، وهو أربعة ، فكان خارج الضرب ٣٩٢ زدناه على السطر الأوسط ، الذي هو ٣٠٧٦ ، فكان ٣٤٦٨ ، فأثبتناه في السطر الأوسط ، بعد محو ما كان ، ثم زدنا أول مراتب الأعلى على مراتب الأسفل ، فكان ١٠٢ ، فأثبتناه في السطر الأسفل بعد محو ما كان ، ثم حولنا السطر الأوسط مرتبة إلى اليمين ، والسطر الأسفل مرتبتين إلى اليمين ، ثم طلبنا عددًا ، وهو خمسة ، ووضعناه على أول المرتبة المنطقة ، وذلك أول سطر العدد ، إذ لم يبق معنا غيرها ، ووضعنا مثل ذلك العدد في السطر الأسفل ، فكان بعد هذه الصورة :

٠	١	٧	٥	٩	٦	٢	٥
	٣	٠	٧	٦			٠
		٩	٤				
			٨				

على هذه الصورة

	٣			٤			٥
٠	١	٧	٥	٩	٦	٢	٥
٠	٠	٣	٤	٦	٨	٠	٠
				١	٠	٢	٥

ثم ضربنا أول مراتب السطر الأعلى ، وهو خمسة ، في جميع مراتب الأسفل ، وهو ١٠٢٥ ، فكان حاصل الضرب ٥١٢٥ ، زدناه على ما في السطر الأوسط وهو ٣٤٦٨٠٠ ، فكان المجموع هكذا : ٣٥١٩٢٥ ، فأثبتنا ذلك في السطر

---

(١) ضعّفنا: أضعفنا – خ – /.

(٢) ٩٨: ٨– خ– /.

الأوسط بعد محو ما كان قبله ، ثم ضربنا هذا المثبت في أول مراتب الأعلى ، وهو خمسة ، فكان ١٧٥٩٦٢٥ ، ثم قابلنا به ما بقي في سطر العدد فوجدناه قد فني ولم [٤٨ظ] / يبق منه بقية ، فكان ما على السطر الأعلى هو كعب ذلك العدد وذلك ٣٤٥ وهذا صورة ذلك :

٥			٤			٣	
٥	٢	٤	٩	٥	٧	١	٠
٥	٢	٩	١	٥	٣		
٥	٢	٠	١				

والله أعلم .

فائدة :

متى قسمت ما في السطر الأسفل غير المرتبة الأولى ، أعني الخمسة ، <على الثلاثة> ، خرج الكعب سواء المرتبة الأولى ، والله أعلم بالصواب .

فإن قيل : استخرج لنا كعب هذا العدد وهو ١٤٨١٥٤٤ ، أعني ألف ألف وأربعمائة وأحدًا وثمانين ألفًا وخمسمائة وأربعة[١] وأربعين ، فضع ذلك بين سطرين كما تقدم وعلم المراتب المنطقة بمنطق وأصمين ، على هذه الصورة :

						١
٤	٤	٥	١	٨	٤	١
·			·			١
						١
						٢

ثم تضع فوق السطر الأعلى على المرتبة المنطقة الأخيرة واحدًا ، وتحت السطر الأسفل كذلك ، ثم تضرب الأعلى في الأسفل يكون[٢] واحدًا ، تضعه في السطر الأوسط مكان الصفر ، ثم تضرب الأعلى في الأوسط ، فيكون واحدًا أيضًا ،

(١) وأربعة: أربعة – خ – /.   (٢) يكون: يكن – خ – /.

فاطرحه من سطر العدد من المرتبة المنطقة ، وهو واحد أيضًا يفن ، وضع مكانه[١] صفرًا ، ثم ضعف[٢] المرتبة السفلى فتصير اثنين ، ثم تضربها في العليا ، فتكون بعينها ، فزدها على ما في السطر الأوسط ، وهو الواحد ، فتصير ثلاثة ، فتثبتها ، ثم تزيد الأعلى على الأسفل ، فيصير الأسفل أيضًا ، ثلاثة ، ثم تنقل الأوسط[٣] / [٤٩و] مرتبة إلى جهة اليمين ، والأسفل مرتبتين إلى جهة اليمين ، فتصير على هذه الصورة :

١						
٠	٤	٨	١	٥	٤	٤
٠	٣		٠			٠
		٣				

ثم تفرض عددًا ، وهو واحد ، وتضعه على المرتبة المنطقة الثالثة الأخيرة من جهة اليمين على السطر الأعلى ، إذ لا يمكن غيره ، ثم مثله أسفل السطر الأسفل ، ثم اضرب مافي السطر الأسفل في أول مراتب السطر الأعلى ، وهو واحد ، فيخرج الأسفل بعينه وهو ٣١ ، فتزيده على السطر الأوسط ، فيكون هكذا : ٣٣١ ، ثم تضربه في أول مراتب الأعلى ، وهو واحد ، فيخرج بعينه ، فتسقطه من العدد فيبقى ١٥٠ فتثبته في مراتبه ، ثم تضعف أول السطر الأسفل ، يكون اثنين[٤] ، ثم تضرب جميع الأسفل في أول مراتب الأعلى ، الذي هو واحد ، فيخرج الأسفل بعينه ، وهو ٣٢ ، فتزيده على الأوسط ، فيكون الأوسط ٣٦٣ ، فأثبته في السطر الأوسط ، ثم زد الأعلى على أول مراتب الأسفل ، فتصير مراتب الأسفل ٣٣ ، ثم تنقل الأوسط مرتبة إلى جهة اليمين ، والأسفل مرتبتين إلى جهة اليمين على هذه الصورة :

(١) يفن، وضع مكانه: فيفنى، فتضع مكانها – خ – /.

(٢) ضعّف: تضعف – خ – /. (٣) الأوسط: الوسط – خ – /.

(٤) اثنين: اثنان – خ – /.

١			١			
٠	١	٥	٠	٥	٤	٤
		٣	٦	٣		
				٣	٢	

ثم تضع على المرتبة المنطقة، وهي الأخيرة من جهة اليمين، عددًا وهو أربعة، [٤٩ظ] في السطر / الأعلى ومثله في السطر الأسفل، واضرب ما في السطر الأسفل في أول مراتب الأعلى[1] فيكون ١٣٣٦، فزده على السطر الأوسط وهو ٣٦٣٠٠، فيكون الحاصل ٣٧٦٣٦، فأثبته في السطر الأوسط بعد محو ما كان أولًا، ثم اضرب ما أثبته في أول مراتب الأعلى، وهو الأربعة، فيكون حاصل الضرب ١٥٠٥٤٤ طرحناه من سطر العدد ففني السطر، وصار على هذه الصورة:

١			١			٤
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠
		٣	٧	٦	٣	٦
				٣	٣	٤

فقلنا أن ما في السطر الأعلى هو كعب هذا العدد، وهو منطق، لأنه فني، والكعب ١١٤، أعني مائة وأربعة عشر، والله أعلم.

واعلم أن استخراج الكعب الأصم بالتقريب، هو كاستخراج المنطق، إلا أنه لا يفنى، فإذا انتهى عملك إلى الآخر، فضعف[2] أول مراتب الأسفل، واضرب جميع مراتب الأسفل في أول مراتب الأعلى، وزد المبلغ على الأوسط، ثم زد أول مراتب الأعلى على الأسفل،ثم زد[3] جميع مراتب الأسفل على الأوسط أيضًا، وزد[4] على المجتمع واحدًا أبدًا، وانسب الأجزاء الباقية من العدد إلى السطر الأوسط، لتكون[5] أجزاء منه من واحد، فتأخذ من الواحد بقدر تلك النسبة

(١) الأعلى: الاعلا – خ – /.
(٢) فضعّف: فاضعف – خ – /.
(٣) زد: تزد – خ – /.
(٤) وزد: وتزد – خ – /.
(٥) لتكون: فتكون – خ – /.

فتزيدها على كعب الصحاح ، يكون كعب ذلك العدد بالتقريب ، والله أعلم بالصواب .

/ولنا طريق آخر في استخراج كعب العدد المكعب ، وهو أن تضع العدد كما [٥٠و] عرفت ، وتعلم[١] مراتبه المكعبة بنقط تحتها ، كما تقدم ، ثم افرض عددًا ، وضعه على السطر الأعلى فوق المنطقة الأخيرة ، ثم أسقط مكعبه مما تحته من العدد ، واثبت الباقي في مراتبه ، ثم اضرب مربع العدد المفروض في ثلاثة أبدًا ، وأثبته في السطر الأوسط منقولاً مرتبة إلى جهة اليمين على المرتبة المنطقة ، ثم اضرب المفروض أيضًا في ثلاثة ، وأثبته تحت الخط الأسفل منقولاً مرتبتين عن المنطقة الآخرة ، كما عرفت ، ثم ضع عددًا في السطر الأعلى فوق المرتبة المنطقة التالية للأخيرة من جهة اليمين ، واضرب العدد الموضوع على السطر الأعلى في الأوسط ، واطرحه من سطر العدد ، وأثبت الباقي في مراتبه ، ثم اضرب مربع الموضوع على السطر الأعلى في السطر الأسفل ، واطرح الخارج أيضًا من سطر العدد ، وأثبت الباقي أيضًا في مراتبه ، ثم كعب الموضوع واطرحه من سطر العدد ، فإن فني العدد وإلا فأثبت ما بقي في مراتبه ، ثم امحُ ما في السطر الأوسط والأسفل ، واضرب مربع جميع ما على السطر الأعلى في ثلاثة ، وأثبته في السطر الأوسط ثم منقولاً إلى جهة اليمين مرتبة ، ثم اضرب جميع الموضوع / في أعلى[٢] [٥٠ظ] السطر أيضًا في ثلاثة ، وأثبته في السطر الأسفل منقولاً مرتبتين إلى جهة اليمين ، ثم افرض عددًا وضعه أعلى[٢] سطر فوق المرتبة الثالثة من جهة اليمين عن المرتبة الأخيرة ، واضرب العدد المفروض في السطر الأوسط واطرحه أيضًا من سطر العدد ، وأثبت الباقي في مراتبه ، ثم اضرب مربع المفروض في السطر الأسفل ، واطرحه من الباقي من سطر العدد ، ثم كعب المفروض وأسقطه من الباقي من سطر العدد ، فإن فني وإلا فأثبت الباقي وافعل كذلك على ما تقدم إلى أن يفنى العدد ، فما وجدت على أعلى السطر الأعلى ، فهو كعب ذلك العدد المطلوب .

---

(١) وتعلم: وعلم – خ – /.

(٢) أعلى: اعلا – خ – /.

تنبيه:

متى أثبت[١] المطروحات الثلاث في ثلاثة أسطر، بحيث يكون السطر الثاني متقدمًا على[٢] الأول مرتبة إلى جهة اليمين، والسطر التالي متقدمًا على[٢] الثاني مرتبة إلى جهة اليمين، ثم جمعت الأسطر الثلاثة[٣] وأسقطت ما جمعت من العدد، كان الباقي كذلك.

مثاله: فيما تقدم لنا من العدد، وهو هذا :

	٣						
٤	١	٠	٦	٣	٦	٢	٥
	.			.			.

ووضعنا الثلاثة فوق المرتبة الأخيرة، ثم طرحنا مكعب الثلاثة، وهو سبعة وعشرون، من واحد وأربعين، / وأثبتنا الباقي، وهو أربعة عشر، ثم ضربنا مربع [٥١و] الثلاثة في ثلاثة أبدًا، فكان ٢٧، فوضعناه في السطر الأسفل منقولاً مرتبة عن المنطقة إلى جهة اليمين، ثم ضربنا الثلاثة أيضًا في ثلاثة بتسعة، وأثبتناها تحت السطر الأسفل منقولاً مرتبتين عن المنطقة إلى جهة اليمين، ثم فرضنا عدد أربعة فوق المرتبة المنطقة الثالثة للمنطقة الأخيرة من جهة اليمين على هذه الصورة :

	٣			٤			
١	٤	٠	٦	٣	٦	٢	٥
	٢	٧					
		٩					

ثم ضربنا الأربعة في السطر الأوسط، فكان مائة وثمانية[٤]، طرحناه من العدد فبقي ٣٢٦٣٦٢٥[٥]، ثم ضربنا مربع الأربعة في السطر الأسفل، فكان ١٤٤

(١) أثبت: اثبتت – خ – /.
(٢) على: عن – خ – /.
(٣) الأسطر الثلاثة: الثلاث أسطر – خ – /.
(٤) وثمانية: وثمانين – خ – /.
(٥) ١٨٢٣٦٢٥: ٢٨٢٣٦٢٥– خ – /.

فطرحنا ذلك من العدد فكان الباقي ١٨٢٣٦٢٥ [1] ، مكعب الأربعة من الباقي من العدد ، فكان الباقي ١٧٥٩٦٢٥ .

وإن شئت عملت بما في التنبيه ، جمعنا الطروحات الثلاث في ثلاثة أسطر منقولاً الثاني عن الأول مرتبة إلى جهة اليمين ، وكذلك الثالث مع الثاني على هذه الصورة :

٤	٠	٣	٢	١
٠	٠	٨	٠	١
٠	٤	٤	١	
٤	٦			

ثم أسقطنا المجتمع من العدد ، فكان الباقي كالأول ، ثم محونا ما كان في السطر الأوسط والأسفل ،/ ثم ضربنا مربع ما على السطر الأعلى الذي هو ٣٤ [2] ، [١٥ظ] ومربعه ١١٥٤ في ثلاثة فكان ٣٤٦٨ ، وأثبتناه في الأوسط متقدمًا رتبة إلى جهة اليمين عن المرتبة المنطقة الثالثة الأخيرة ، ثم ضربنا أيضًا ما على السطر الأعلى[3] وهو ٣٤ في ثلاثة فكان ١٠٢ ، وأثبتناه في السطر الأسفل متقدمًا رتبتين ، ثم فرضنا عددًا وهو ٥ ، وجعلناه على المرتبة الأولى ، إذ لم يبق معنا غيرها ، فكان على هذه الصورة :

٥		٤				٣
٥	٢	٦	٩	٥	٧	١
		٨	٦	٤	٣	
	٢	٠	١			

ثم ضربنا الخمسة في السطر الأوسط فكان ١٧٣٤٠ ، ثم ربعنا الخمسة فكان ٢٥ ، ضربناه في الأسفل فكان ٢٥٥٠ ، ثم كعبنا الخمسة ، فكان ١٢٥ ، وإن شئنا

---

(١) ٢٨٢٣٦٢٥: ١٨٢٣٦٢٥- خ - / .

(٢) ٣٤: ٣٦ - خ - /.

(٣) الأعلى: الاعلا - خ - / .

أسقطنا ما خرج من سطر العدد أولاً فأولاً[١] على ما تقدم ، وإن شئنا جمعنا ذلك وطرحناه من العدد ، فكلا العملين سواء ، ويفنى العدد ، ومجموع الأسطر الثلاثة[٢] هكذا :

١	٧	٥	٩	٦	٢	٥
١	٧	٣	٤	٠	٠	٠
		٢	٥	٥	٠	٠
				١	٢	٥

وهو مساوٍ للباقي من العدد المطلوب كعبه ، أي إذا طرحناه منه لم يبق شيء ، وما على السطح الأعلى هو الكعب المطلوب . واختباره بتكعيب الضلع ، والله أعلم بالصواب .

[٥٢و] **/وأما كيفية استخراج كعب العدد الأصم مع التقريب :**

فاعلم إن كل عدد ليس له كعب حقيقي فهو واقع بين مكعبين حقيقيين ، أحدهما أعظم منه والآخر أصغر منه ، والفضل بينهما دائمًا واحد .

وطريق ذلك أن تضرب كعب المكعب القريب إلى عددك الأصم في ثلاثة أبدًا ، وأنقص من الخارج واحدًا ، وإن استعملت الكعب الأعظم ، وإلا فزد واحدًا إن استعملت المكعب الأصغر ، واجعل ما بقي إمامًا ، واقسم عليه الفضل بين عددك الأصم ومكعب ذلك الكعب المستعمل ، فخارج القسمة سمه الأصل ، ثم ربع ذلك الكعب المستعمل واضربه في ثلاثة واقسمه على الإمام ، وما خرج خذ نصفه وسمه بالفضلة ، ثم ربع الفضلة ، فما كان زد عليه الأصل إن كنت استعملت الكعب الأصغر ، وإلا فأنقص منه الأصل إن استعملت الكعب الأعظم ، ثم خذ جذر[٣] المجموع أو الباقي ، وأسقط الفضلة من جذر المجموع أو جذر الباقي من الفضلة ، فما بقي زده على كعب المكعب الأصغر ، إن كان المستعمل ،

(١) فأولاً: فأول – خ – /.

(٢) الأسطر الثلاثة: الثلاثة أسطر – خ – /.

(٣) جذر: جد – خ – /.

وإلا فاطرحه/ من كعب المكعب الأعظم، يحصل كعب العدد الأصم المفروض [٥٢ظ] بتقريب غير مضر.

مثاله: أردنا استخراج كعب خمسين، فوجدنا الكعبين القريبين[١] منه اللذين[٢] يكتنفانهما[٣]: الأصغر ثلاثة والأعظم أربعة، وليكن استعمالنا الأصغر[٤]، فضربناه في ثلاثة فكان تسعة، زدنا عليه واحدًا، فصار عشرة، وهو الإمام، ثم كعبنا الأصغر فكان سبعة وعشرين، أسقطناه من العدد المطلوب كعبه، وهو خمسون، الباقي ثلاثة وعشرون، قسمناه على الإمام، فكان الخارج اثنين وثلاثة أعشار هكذا:

$$\text{٢ و } \frac{\text{٣}}{\text{١٠}}$$

وهو الأصل، ثم ربعنا الكعب الأصغر، فكان تسعة، ضربناه في ثلاثة، فكان سبعة وعشرين، قسمناه على الإمام، فكان اثنين وسبعة أعشار هكذا:

$$\text{٢ و } \frac{\text{٧}}{\text{١٠}}$$

أخذنا نصفه، فكان واحدًا وثلاثة أعشار ونصف عشر هكذا:

$$\text{١ و } \frac{\text{٣ \quad ١}}{\text{١٠ \quad ٢}}$$

وهو المسمى[٥] بالفضلة، ومربعها واحد وثمانية أعشار وعشري عشر وربع عشر العشر هكذا:

$$\text{١ } \frac{\text{٨ \quad ٢ \quad ١}}{\text{١٠ \quad ١٠ \quad ٤}} \text{ (٦)}$$

---

(١) القريبين: القريبتين – خ –/.

(٢) اللذين: الذين – خ –/.

(٣) يكتنفانهما: يكتنفه – خ –/.

(٤) الأصغر: كلمة غير واضحة – خ –/.

(٥) المسمى: المسماة – خ –/.

(٦) $\text{١ } \frac{\text{٨ \quad ٢ \quad ١}}{\text{١٠ \quad ١٠ \quad ٤}}$: $\text{١ } \frac{\text{٨ \quad ٢ \quad ١}}{\text{١٠ \quad ١٠ \quad ٢}}$ – خ –/.

ثم زدنا عليه الأصل، فكان أربعة وعشرًا وعشري العشر وربع عشر العشر هكذا:

$$\frac{١ \quad ٢ \quad ١}{٤ \quad ١٠ \quad ١٠} \text{ و } ٤$$ [1]،

[٥٣و] فأخذنا جذره بالتقريب[2]، / فكان اثنين وثمني عشر ونصف ثمن العشر هكذا:

$$\frac{١ \quad ٢ \quad ٠}{٢ \quad ٨ \quad ١٠} \text{ و } ٢$$

ثم طرحنا منه الفضلة، فكان الباقي ستة أعشار وستة أثمان العشر ونصف ثمن العشر هكذا:

$$\frac{١ \quad ٦ \quad ٦}{٢ \quad ٨ \quad ١٠}$$

زدنا على الكعب الأصغر، وهو ثلاثة، فكان كعب الخمسين المقرب ثلاثة وستة أعشار وستة أثمان العشر ونصف ثمن عشر هكذا:

$$\frac{١ \quad ٦ \quad ٦}{٢ \quad ٨ \quad ١٠} \text{ و } ٣$$

فإذا أردنا امتحان ذلك، فنكعب الكعب المذكور، فيكون مكعبه تسعة وأربعين <وثمانية أعشار> وثمانية أعشار العشر <وستة أعشار عشر العشر> وستة أثمان عشر عشر العشر < وخمسة أثمان ثمن عشر عشر العشر> وثمنا[3] ثمن ثمن عشر عشر العشر و < خمسة أثمان> ثمن ثمن ثمن عشر عشر العشر هكذا:

$$\frac{٥ \quad ٢ \quad ٥ \quad ٦ \quad ٦ \quad ٨ \quad ٨}{٨ \quad ٨ \quad ٨ \quad ٨ \quad ١٠ \quad ١٠ \quad ١٠} \text{ و } ٤٩ .$$

ولو استعملت **الكعب الأعظم** وهو أربعة، لكان الكعب المطلوب ثلاثة

(١) $\frac{١ \quad ٢ \quad ١}{٤ \quad ١٠ \quad ١٠} \text{ و } ٤$: $\frac{١ \quad ٢ \quad ١}{٢ \quad ١٠ \quad ١٠} \text{ و } ٤$ – خ – /.

(٢) بالتقريب: بتقريب – خ – /.

(٣) وثمنا: وسبعة أثمان – خ – /.

وسبعة أجزاء من أحد عشر جزءًا من واحد وثلاثة أسباع الجزء من أحد عشر جزءًا من **الواحد وخمسة** أسداس سبع الجزء من أحد عشر جزءًا من الواحد :

٥ ٣ ٧
٣ و ـــــــــ
٦ ٧ ١١

فإذا كعبناه فسيكون[١] مكعبه خمسين وعشرة أجزاء من أحد عشر جزءًا[٢] في الجزء من الواحد من أحد عشر جزءًا من واحد وأربعة أجزاء من أحد عشر جزءًا في الجزء من أحد عشر جزءًا في الجزء من أحد عشر جزءًا من الواحد وخمسة أسباع الجزء من أحد عشر في الجزء من أحد عشر في الجزء من / أحد عشر جزءًا من [٥٣ظ] الواحد ، وسبعا سبع <السبع> الجزء من أحد عشر جزءًا في الجزء من أحد عشر جزءا في الجزء من أحد عشر في الجزء من أحد عشر جزءًا من واحد ، وثلاثة[٣] أسداس سبع سبع سبع الجزء من أحد عشر جزءًا من أحد عشر جزءًا في الجزء من أحد عشر جزءًا من الواحد ، < وخمسة أسداس سدس سبع سبع سبع من أحد عشر جزءًا من الواحد من أحد عشر جزءًا من الواحد من أحد عشر جزءًا من الواحد> وخمسة أسداس[٤] سدس سدس سبع سبع سبع الجزء من أحد عشر جزءًا في الجزء من أحد عشر جزءًا من أحد عشر جزءًا من الواحد وصورته هكذا :

٥ ٥ ٣ ٢ ٠ ٥ ٤ ١٠ ٠
.[٥] ـــــــــــــــــــــ و ـــ
٦ ٦ ٦ ٧ ٧ ٧ ١١ ١١ ١١ ٥٠

(١) فسيكون: فيكون – خ – /.
(٢) جزءاً: جزء – خ – /.
(٣) وثلاثة: وأربعة – خ – /.
(٤) وخمسة أسداس: وسدس سدس – خ – /.
(٥)
٥ ٥ ٣ ٢ ٠ ٥ ٤ ١٠ ٠ ـــــ ٦ ٦ ٦ ٧ ٧ ٧ ١١ ١١ ١١ : ١ ٠ ٤ ٢ ٠ ٥ ٤ ١٠ ٠ ـــــ ٦ ٦ ٦ ٧ ٧ ٧ ١١ ١١ ١١ – خ –/.

وإن أردت زيادة التدقيق، فخذ نصف مجموع الكعبين الأصغر والأعظم، يكن[١] ذلك كعب الخمسين بأقرب التقريب وهو هذا:

$$\frac{-}{٣} \text{ و } \frac{١\ \ ٣\ \ ٤\ \ ١\ \ ٥\ \ ٧}{٢\ \ ٦\ \ ٧\ \ ٨\ \ ١٠\ \ ١١}$$

فإذا اختبرناه بالتكعيب، فهو على هذه الصورة، وهو مكعب كعب الخمسين بأقرب التقريب:

$$\frac{-}{٤٩} \text{ و } \frac{١\ \ ٣\ \ ٣\ \ ٣\ \ ٢\ \ ٤\ \ ٠\ \ ٢\ \ ٥\ \ ٠\ \ ٠\ \ ١٠\ \ ١٠}{٦\ \ ٦\ \ ٦\ \ ٧\ \ ٧\ \ ٧\ \ ٨\ \ ٨\ \ ٨\ \ ٨\ \ ١١\ \ ١١\ \ ١١}$$

وعلى هذا فقس، والله أعلم بالصواب .

ولنا طريقة أخرى تعرف بالاستقراء، وهو أن تحل العدد المفروض إلى أعداده الأوائل، ثم تتوخى ثلاثة أعداد بحيث يتركب منها[٢] مكعب يساوي المفروض، [٥٤و] فيكون كعبه أحدها، / وإلا[٣]، فلا كعب له صحيح.

وأما أخذ كعوب الكسور، فاعلم أنها تنقسم إلى أربعة أقسام:

- **الأول**: أن يكون كل من البسط والإمام مكعب كالثمن.
- **الثاني**: أن البسط مكعب والإمام غير مكعب كسُبعين وثلثي سبع.
- **الثالث**: أن يكون الإمام مكعب والبسط غير مكعب كتسعَين وثلث تسع.
- **الرابع**: أن يكون كل منهما غير مكعب.

أما استخراج كعب القسم الأول: وهو أن يكون كل من البسط والإمام مكعبًا، وذلك أن تنسب كعب البسط إلى كعب الإمام، يحصل كعب المطلوب،

---

(١) يكن: فيكون – خ – /.
(٢) منها: منهم – خ – /.
(٣) وإلا: وإن لم – خ – /.

وكذلك العمل في كل كسر لإمامه كعب حقيقي .

مثاله : نريد كعب تسعَين وثلثي تسع هكذا :

٢ ٢
———
٣ ٩

البسط ثمانية وكعبه اثنان ومسطح الإمامين سبعة وعشرون ، وكعبه ثلاثة ، ونسبة الاثنين إلى الثلاثة : ثلثان ، وهو الكعب المطلوب ، وهذا صفته :

٢
——
٣

وأما استخراج كعب القسم الثاني : وهو أن يكون البسط مكعبًا والإمام غير مكعب ، مثل ثمانية أتساع ، فطريق استخراج الكعب في هذا القسم/ وبقية [٥٤ظ] الأقسام ، وتسمى الطريق العام ، فهو أن تضرب البسط في عدد يكون خارج مسطحه في الإمام مكعب ، ثم تقسم كعب خارج مسطح البسط في ذلك العدد على كعب خارج مسطح الإمام في ذلك العدد ، وخارج القسمة يكون الكعب المطلوب .

ففي هذا المثال : تضرب الثمانية ، وهي البسط في ثلاثة ، أعني العدد الذي إذا ضرب في الإمام ، وهو تسعة ، كان سبعة وعشرين ، وهو عدد مكعب ، وكعبه الثلاثة ، فكان خارج الضرب أربعة وعشرين ، وكعبه بالتقريب اثنان وسبعة أثمان ونصف خمس خمس الثمن هكذا :

١ ٠ ٠ ٧
————— و ٢
٢ ٥ ٥ ٨

اقسمه على كعب الإمام ، وهو ثلاثة ، يخرج من القسمة تسعة أعشار وأربعة أثمان العشر وثلاثة أخماس ثمن العشر وثلثا خمس ثمن العشر ، وهو الكعب المطلوب ، وهكذا صورته :

٢ ٣ ٤ ٩
―――――
٣ ٥ ٨ ١٠

والله أعلم.

وأما[١] **القسم الثالث** : فهو[٢] أن يكون البسط غير مكعب والإمام مكعب، مثل ثلاثة أثمان وخمسة أثمان الثمن هكذا:

٥ ٣
――
٨ ٨

[٥٥و] فالبسط تسعة وعشرون والإمام أربعة / وستون، وكعبه أربعة[٣]، فإذا قسمت كعب البسط بالتقريب على كعب الإمام، يكون[٤] سبعة أعشار وسبعة أثمان العشر وربع ثمن العشر على هذه الصورة:

١ ٧ ٧
―――
٤ ٨ ١٠

وأما استخراج كعب القسم الرابع: فهو ألا[٥] يكون لبسط الكسر ولا لإمامه كعب حقيقي كسبعة أتساع، فإنك تضرب السبعة في ثلاثة يكون أحدًا وعشرين، فاستخرج كعبها، كما تقدم، واقسمه على كعب مسطح الإمام في الثلاثة، وهو ثلاثة، يكن[٦] خارج القسمة سبعة أثمان وسدسي[٧] ثمن وسدس سدس الثمن هكذا:

١ ٢ ٧
―――
٦ ٦ ٨

---

(١) وأما: ومال – خ –/.

(٢) فهو: وهو – خ –/.

(٣) أربعة: ثمانية – خ –/.

(٤) يكون: يكن – خ –/.

(٥) فهو ألا: وهو أن لا – خ –/.

(٦) يكن: يكون – خ –/.

(٧) وسدسي: وسدس – خ –/.

تنبيه:

متى كان الكسر أو الكسور غير منطقة، فاضرب بسطها في مكعب يكن[١] ضلعه إمامًا لتلك الكسور، ثم خذ كعب الخارج بالتقريب[٢].

وإن شئت: فاضرب البسط في كعب الإمام، واقسم كعب الخارج على ضلع ذلك الكعب.

مثاله: أردنا كعب أربعة أتساع، فضربنا ذلك في تسعة وعشرين وسبعمائة، أعني مكعب المقسوم، فكان أربعة وعشرين وثلثمائة، وكعبها مع التقريب ستة وثمانية أعشار وستة أعشار العشر وستة أثمان عشر العشر وثلاثة أرباع ثمن عشر العشر هكذا:

٣	٦	٦	٨	
٤	٨	١٠	١٠	و٦

/ هذا على التسعة التي هي ضلع المكعب المضروب فيه، فكان خارج القسمة [٥٥ظ] ستة أتساع وستة أثمان تسع[٣] وسبعة أثمان ثمن التسع[٤] وخمسا ثمن ثمن التسع وأربعة أخماس خمس ثمن <ثمن> التسع ونصف خمس خمس ثمن ثمن التسع، وهو المكعب المطلوب وهكذا صورته:

١	٤	٢	٧	٦	٦
٢	٥	٥	٨	٨	٩

فاعلم ذلك، وقس على ما ذكرناه تصب إن شاء الله تعالى.

❁❁❁

---

(١) يكن: يكون – خ –/.

(٢) بالتقريب: بتقريب – خ –/.

(٣) تسع: مكررة – خ –/.

(٤) التسع: تسع التسع – خ –/.

وتمت هذه الرسالة المسماة بـ: إِرْشَادِ العُجْمِ لأَعْمَالِ الجُذُورِ الصُّمِّ بيمن
الله وتوفيقه ومنّتِهِ[١] ، وهو المؤمل في الحماية ، وعليه التوكل
في الهداية والصلاة والسلام على سيدنا محمد المؤيد
بكتائب الرغب ومواكب العناية وعلى آله وأصحابه
ذوي المكارم والولاية وسلم تسليماً كثيراً على
يد مؤلفها العبد الفقير إلى الله تعالى
محمد ابن أبي الفتح محمد بن الشرقي
أبي الروح عيسى ابن أحمد الصوفي
الشافعي المصري لطف الله بهم
وبالمسلمين . . .
توفي سنة سبع وتسعين
وثمانمائة والحمد لله
وحده وصلواته على
سيدنا محمد وآله
وصحبه
وسلم

*

(١) ومنّتِهِ: ومنّة – خ – /.

فهرس
المصطلحات العلمية

فهرس المصطلحات العلمية

الدراسة الرياضية

الدراسة الرياضية

فاتحة الرسالة (صفحة ٢٩):

نستخلص من الجزء المتبقي من فاتحة الرسالة هدف المؤلف من عمله وهو: توضيح الطرق لاستخراج جذور الأعداد بالتحقيق من مادة الكم المتصل بالبرهان الهندسي باستخدام مربعات تلك الأعداد، ومربعات مربعاتها بأعمال خاصة بها من ضرب وجمع وطرح وقسمة وتسمية وجذر.

– رتب المؤلف الرسالة على مقدمة وفنين وخاتمة.

المقدمة (صفحة ٣١):

– قسم المؤلف الخط إلى قسمين:

١– مفرد:
- أ – منطق في الطول **مثال:** ٥ .
- ب – أصم:
  - منطق بالقوة. **مثال:** $\sqrt{5}$
  - الموسط **مثال:** $\sqrt[4]{5}$

٢ – مركب (ذو الاسمين):
- أ – مركب من عددين أصمين.
- ب – مركب من منطق وأصم.

مثال: $3 + \sqrt{5}$

– يشير المؤلف إلى أن الجمهور اصطلح التعبير عن لفظ الجذر بجيم مقطوعة هكذا: ـجـ، بما يعادل الرمز المعروف حاليًا بـ ($\sqrt{\ }$)، وفي حالة تكرار لفظ الجذر يكررون لفظ الجيم المقطوعة بحسب الحاجة، فمثلاً جذر جذر خمسة يُعبر المؤلف عنه بـ $\overset{\text{ـجـ}}{\underset{5}{\text{ـجـ}}}$ ، بما يعادل الرمز المعروف حاليًا بـ ($\sqrt[4]{5}$)، وهكذا.

– ويستحسن المؤلف وصل الجيم المقطوعة مع بعضها في حالة تكرارها، أي يقترح كتابة: جـ 5 هكذا: جـجـ 5 .

– ويشرح المؤلف طريقة التعبير عن جذر عدد صحيح وجذر، ويأتي بالمثال التالي: ثلاثة وجذر خمسة مأخوذًا جذرهما، ويكتب العبارة هكذا:

جـ جـ
٥ ٣

ونكتب هذه العبارة حاليًا هكذا: $\sqrt{3+\sqrt{5}}$

- **الفن الأول** (صفحة ٣٣):

– خصص المؤلف الفن الأول لأعمال جذور الأعداد الصم المفردة غير المركبة من تضعيفها وتبعيضها وضربها وجمعها وطرحها وقسمتها ونسبتها، وقسمه إلى أربعة فصول.

۞۞۞

الفصل الأول

في تضعيف جذور الأعداد وتبعيضها

(الصفحة٣٥)

- يضع المؤلف – في بداية الفصل – قواعد عامة تتعلق بتضعيف جذور الأعداد وتنصيفها، وقواعد أخرى وهي:

$*\sqrt{A} \neq \sqrt{B}$

$*\frac{1}{2}\sqrt{A} = \sqrt{\frac{1}{4}A}$

$* 2\sqrt{A} = \sqrt{4A}$

$* \frac{1}{n}\sqrt{A} = \sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 .A} = \sqrt{D}$

$* n\sqrt{A} = \sqrt{n^2.A} = \sqrt{c}$

$*\frac{1}{2}\sqrt{A} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 .A} = \sqrt{\frac{1}{4}.A}$

$* 2\sqrt{A} = \sqrt{(2)^2.A} = \sqrt{4A}$

$* 2\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{(2)^n.A}$

$* 2\sqrt[4]{A} = \sqrt[4]{(2)^4.A}$

– ثم يقدم المؤلف أمثلة على القواعد السابقة:

* **مثال:** (صفحة ٣٥)

«نريد أن نضعف جذر خمسة مرة واحدة»

$$2\sqrt{5} = \sqrt{(2)^2.5} = \sqrt{4.5} = \sqrt{20}$$

* **مثال:** (صفحة ٣٥)

«**ولو قيل:** جذرا جذر خمسة لأي عدد يكون جذرًا؟»

$$2\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{(2)^4.5} = \sqrt[4]{16.5} = \sqrt[4]{80}$$

* **مثال:** (صفحة ٣٦)

«**ولو قيل:** ثلاثة أجذار خمسة لأي عدد يكون جذرًا؟»

$$3\sqrt{5} = \sqrt{(3)^2.5} = \sqrt{9.5} = \sqrt{45}$$

* **مثال:** (صفحة ٣٦)

«**فلو قيل:** ثلاثة أجذار جذر خمسة لأي عدد يكون جذرًا؟»

$$3\ \sqrt[4]{5} = \ \sqrt{(3)^4\ .\ 5} = \sqrt{81.5} = \sqrt{405}$$

* **مثال:** (صفحة ٣٦)

«**ولو قيل:** جذرا خمسة ونصف جذر خمسة، لأي عدد يكون جذرًا؟»

$$2\sqrt{5} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5} = 2\tfrac{1}{2}\sqrt{5} = \sqrt{\left(2\tfrac{1}{2}\right)^2.5} = \sqrt{\left(6\tfrac{1}{4}\right)(5)} = \sqrt{31\tfrac{1}{4}}$$

* **مثال:** (صفحة ٣٦)

«**ولو قيل:** جذرا جذر أربعين، لأي عدد يكون جذرًا؟»

$$2\sqrt[4]{40} = \sqrt{(2)^4.40} = \sqrt{16.40} = \sqrt{640}$$

* **مثال:** (صفحة ٣٦)

«نصف جذر خمسة، لأي عدد يكون جذرًا؟»

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{5} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2.5} = \sqrt{\tfrac{1}{4}\,.\,5} = \sqrt{1\tfrac{1}{4}}$$

* **مثال:** (صفحة ٣٦)

«**ولو قيل:** ثلث جذر عشرة، لأي عدد يكون جذرًا؟»

$$\tfrac{1}{3}\sqrt{10} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{3}\right)^2.10} = \sqrt{\tfrac{1}{9}\,.\,10} = \sqrt{1\tfrac{1}{9}}$$

* **قاعدة:** (صفحة ٣٦)

«ولو أردنا جذر جزء عدد لضربنا ذلك العدد بمخرج الجزء، وأخذنا من جذر الحاصل ذلك الجزء، أعني بقلب المضاف، يحصل المطلوب».

$$\sqrt{\frac{1}{A}.B}=\frac{\sqrt{A.B}}{A}$$

* **مثال:** (صفحة ٣٧)

«جذر نصف خمسة، كم هو؟»

$$\sqrt{\frac{1}{2}.5}=\frac{\sqrt{2.5}}{2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

* **مثال:** (صفحة ٣٧)

«**وكذا لو قيل** كم جذر ثلث عشرة؟»

$$\sqrt{\frac{1}{3}.10}=\frac{\sqrt{3.10}}{3}=\frac{\sqrt{30}}{3}$$

* **مثال:** (صفحة ٣٧)

«**ولو قيل:** جذر ربع ستة عشر، كم هو؟»

$$\sqrt{\frac{1}{4}.16}=\frac{\sqrt{4.16}}{4}=\frac{\sqrt{64}}{4}=2$$

* مثال: (صفحة ٣٧)

«**ولو قيل:** كم جذر خُمس عشرين؟»

$$\sqrt{\frac{1}{5}.20}=\frac{\sqrt{5.20}}{5}=\frac{\sqrt{100}}{5}=2$$

* **قاعدة:** (صفحة ٣٧)

«وإذا أردنا أن يكون جذر عدد، أضعاف جذر لعدد آخر أو أبعاضا مًن جذر عدد آخر».

إذا كان لدينا جذر عدد ولنفرضه: $(\sqrt{A})$، وأردنا جعله أضعاف جذر لعدد آخر أو أبعاضًا من جذر عدد آخر، نفرض العلاقة التالية: $\sqrt{A} = n\sqrt{B}$ والمطلوب تحديد (B). ونحدد (B) بالعلاقة التالية:

$$B = \left(\frac{1}{n}\right)^2 .A$$

* **مثال:** (صفحة ٣٧)

«جذر عشرين، لأي عدد يكون جذرين؟»

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{20} = \sqrt{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 .20} = \sqrt{\tfrac{1}{4}.20} = \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

* **مثال:** (صفحة ٣٧)

«**ولو قيل:** جذر عشرة لأي عدد يكون نصفًا؟»

$$2\sqrt{10} = \sqrt{(2)^2 .10} = \sqrt{4.10} = \sqrt{40} \Rightarrow \sqrt{10} = \tfrac{1}{2}\sqrt{40}$$

* **مثال:** (صفحة ٣٧)

«**ولو قيل:** جذر عشرة لأي عدد يكون ثلاثة أثمان جذره؟»

$$\frac{8}{3}\sqrt{10} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 .10} = \sqrt{\left(2\frac{2}{3}\right)^2 .10}$$

$$= \sqrt{7\frac{1}{9}.10} = \sqrt{71\frac{1}{9}} \Rightarrow \sqrt{10} = \frac{3}{8}\sqrt{71\frac{1}{9}}$$

* **مثال:** (صفحة ٣٨)

«**فإن قيل:** جذرا ثلاثة أجذار أربعين لأي عدد يكون جذرًا؟»

$$3\sqrt{40} = \sqrt{9.40} = \sqrt{360} \Rightarrow 2\sqrt[4]{360} = \sqrt[4]{16.360}$$
$$= \sqrt[4]{5760} \Rightarrow 2\sqrt{3\sqrt{40}} = \sqrt[4]{5760}$$

تنبيه:

(صفحة ٣٨)

«اعلم أن تربيع جذر عدد، هو أن تسقط لفظ الجذر منه، أو ترفع الجيم عن ذلك العدد مرة أو مرات بحسب تكرار التربيع».

$$* \left(\sqrt{A}\right)^2 = A \qquad * \left(\sqrt[n]{A}\right)^n = A$$

مثال (صفحة ٣٨)

«جذر خمسة هكذا: ، إذا ربعته رفعت عنه الجيم فصار هكذا: ٥».

$$* \left(\sqrt{5}\right)^2 = 5 \qquad * \left(\sqrt[4]{5}\right)^2 = \sqrt{5}$$



الفصل الثاني

في ضرب الجذور بعضها ببعض وفي المنطقة

قاعدة (صفحة ٣٩)

$$* \sqrt{A}.\sqrt{B} = \sqrt{A.B} \qquad * \sqrt[4]{A}.\sqrt[4]{B} = \sqrt[4]{A.B}$$

$$* A.\sqrt{B} = \sqrt{A^2}.\sqrt{B} = \sqrt{A^2.B}$$

$$* \sqrt{A}.\sqrt[4]{B} = \sqrt[4]{A^2}.\sqrt[4]{B} = \sqrt[4]{A^2.B}$$

* **مثال:** (صفحة ٣٩)

«**فإن قيل:** اضرب خمسة في جذر سبعة»

$$* 5.\sqrt{7} = \sqrt{(5)^2}.\sqrt{7} = \sqrt{25}.\sqrt{7} = \sqrt{25.7} = \sqrt{175}$$

* **مثال:** (صفحة ٤٠)

«**ولو قيل:** اضرب جذر خمسة في جذر سبعة»

$$* \sqrt{5}.\sqrt{7} = \sqrt{5.7} = \sqrt{35}$$

* **مثال:** (صفحة ٤٠)

«**ولو قيل:** جذر ثلاثة في جذر اثني عشر»

$$* \sqrt{3}.\sqrt{12} = \sqrt{3.12} = \sqrt{36}$$

* **مثال:** (صفحة ٤٠)

«**ولو قيل:** اضرب جذر عشرة في جذر ستة»

$$*\sqrt{10}.\sqrt{6}=\sqrt{10.6}=\sqrt{60}$$

*** مثال:** (صفحة ٤٠)

«**ولو قيل:** اضرب العدد ثمانية في جذر عشرة»

$$*8.\sqrt{10}=\sqrt{(8)^2}.\sqrt{10}=\sqrt{64}.\sqrt{10}=\sqrt{64.10}=\sqrt{640}$$

*** مثال:** (صفحة ٤٠)

«**ولو قيل:** اضرب ثلاثة أجذار ستة في خمسة أجذار عشرة»

$$*3\sqrt{6}.5\sqrt{10}=\sqrt{(3)^2.6}.\sqrt{(5)^2.10}$$

$$=\sqrt{54}.\sqrt{250}=\sqrt{54.250}=\sqrt{13500}$$

*** مثال:** (صفحة ٤٠)

«**ولو قيل:** اضرب جذر سبعة في ثلاثة أرباع جذر اثنين وثلاثين»

$$*\sqrt{7}.\frac{3}{4}\sqrt{32}=\sqrt{7}.\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2.32}$$

$$=\sqrt{7}.\sqrt{\left(\frac{4}{8}+\frac{1}{2}.\frac{1}{8}\right).32}=\sqrt{7}.\sqrt{18}=\sqrt{126}$$

*** مثال:** (صفحة ٤١)

«**ولو قيل:** اضرب ثلاثة أرباع جذر اثنين وثلاثين في ثلاثة أجذار عشرة»

$$*\frac{3}{4}\sqrt{32}.3\sqrt{10}=\sqrt{18}.\sqrt{90}=\sqrt{18.90}=\sqrt{1620}$$

*** مثال:** (صفحة ٤١)

«**ولو قيل:** اضرب ثلاثة أجذار سبعة في ربع جذر عشرين»

$$3\sqrt{7}.\tfrac{1}{4}\sqrt{20}=\sqrt{63}.\sqrt{\tfrac{20}{16}}=\sqrt{78\tfrac{3}{4}}$$

* **مثال:** (صفحة ٤١)

«**ولو قيل:** اضرب جذر جذر خمسة في جذر جذر عشرة»

$$*\sqrt[4]{5}.\sqrt[4]{10} = \sqrt[4]{5.10} = \sqrt[4]{50}$$

* **مثال:** (صفحة ٤١)

«**وكذا لو قيل:** اضرب جذر جذر ثلاثة في جذر جذر خمسة»

$$*\sqrt[4]{3}.\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{3.5} = \sqrt[4]{15}$$

* **مثال:** (صفحة ٤١)

«**فلو قيل:** اضرب جذر عشرة في جذر جذر خمسة»

$$*\sqrt{10}.\,\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{(10)^2}.\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{100.5} = \sqrt[4]{500}$$

* **مثال:** (صفحة ٤٢)

«**ولو قيل:** اضرب جذر جذر خمسة في جذري جذر عشرة»

$$*\ \sqrt[4]{5}.\,2\sqrt[4]{10} = \sqrt[4]{5}.\sqrt[4]{(2)^4.10} = \sqrt[4]{5}.\,\sqrt[4]{160} = \sqrt[4]{800}$$

* **مثال:** (صفحة ٤٢)

«**ولو قيل:** اضرب جذر جذر اثنين في نصف جذر جذر اثنين وثلاثين»

$$*\ \sqrt[4]{2}.\,\tfrac{1}{2}\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{2}.\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{4}$$

* **مثال:** (صفحة ٤٢)

«**ولو قيل:** اضرب نصف جذر جذر ثمانية في ثلث جذر جذر تسعين»

$$\frac{1}{2}\sqrt[4]{8}.\frac{1}{3}\sqrt[4]{90}=\sqrt[4]{\frac{1}{2}}.\sqrt[4]{1.\frac{1}{9}}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)\left(1\frac{1}{9}\right)}=\sqrt[4]{\frac{5}{9}}$$

*** مثال:** (صفحة ٤٢)

«**ولو قيل:** اضرب نصف جذر جذر اثني عشر في ربع جذر جذر اثنين وثلاثين»

$$\frac{1}{2}\sqrt[4]{12}.\frac{1}{4}\sqrt[4]{32}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\right).(12)}.\sqrt[4]{\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\right)(32)}$$

$$=\sqrt[4]{\frac{3}{4}}.\sqrt[4]{\frac{1}{8}}=\sqrt[4]{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{8}}$$

قاعدة اختبار صحة الضرب: (صفحة ٤٢)

إذا كان لدينا $A.B=C$ لاختبار صحة عملية الضرب السابقة، نجري إحدى العمليتين التاليتين:

$$\left(\frac{C}{A}\right)=B \text{ أو } \left(\frac{C}{B}\right)=A$$

فإذا كانت إحداهما صحيحة فإن عملية الضرب صحيحة.

❁❁❁

الفصل الثالث

في الجمع والطرح

(صفحة ٤٣)

يشترط المؤلف الاشتراك لجمع جذر عدد مع جذر عدد آخر أو لطرحهما، أو لجمع موسطين متحدي الرتبة أو طرحهما، ومتى لم يكن بينهما اشتراك فالجمع أو الطرح بواو العطف أو بحرف الاستثناء. ولمعرفة الاشتراك قانونان:

- **القانون الأول:** (صفحة ٤٣)

* إذا كان: $\sqrt{A.B} = \sqrt{C^2}$

إذًا بين A و B اشتراك.

* **إذا كان:** $\sqrt{A.B} = \sqrt{D}$ حيث D عدد أصم $\Leftarrow$ لايوجد بين A وB اشتراك.

* **وإذا كان:** $\sqrt[4]{A.B} = \sqrt[4]{C^2}$ إذًا بين A و B اشتراك.

* **وإذا كان:** $\sqrt[4]{A.B} = \sqrt[4]{D}$ حيث D عدد أصم $\Leftarrow$ لايوجد بين A وB اشتراك.

- **القانون الثاني:** (صفحة ٤٣)

* **إذا كان:** $\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{C^2}{D^2}}$ إذًا بين A و B اشتراك.

* إذا كان: $\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{E}{F}}$

حيث E وF عددان أصمان $\Leftarrow$ لايوجد بين A و B اشتراك

* **مثال:** (صفحة ٤٣)

«ثمانية وثمانية عشر هذان العددان بينهما اشتراك»

إن بين (8) و (18) اشتراك: لأن 8= 2,4 ومنه $\Leftarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

ولأن 18=3.6 ومنه $\Leftarrow \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

إذًا يشترك العددان (8) و (18) بنسبة الـ $\left(\frac{1}{2}\right)$

* **مثال:** (صفحة ٤٤)

«وكذلك ثلاثة واثنا عشر < بينهما اشتراك >»

إن بين (3) و (12) اشتراكًا: لأن 3= 1.3 ومنه $\Leftarrow \frac{1}{3}$

ولأن ١٢=٢.٦ ومنه $\Leftarrow \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

إذًا يشترك العددان (٣) و (١٢) بنسبة الـ $\left(\frac{1}{3}\right)$

قواعد: < جمع الجذور وطرحها > (صفحة ٤٨)

(حيث: A>B في حالة الطرح)

$$\sqrt{A} \mp \sqrt{B} = \sqrt{A + B \mp 2\sqrt{A.B}}$$

أو:

(حيث: A>B في حالة الطرح)

$$\sqrt{A} \mp \sqrt{B} = \sqrt{A + B \mp \sqrt{4A.B}}$$

(حيث: A>B في حالة الطرح)

$$\sqrt{A} \mp \sqrt{B} = \sqrt{B\left(\sqrt{\tfrac{A}{B}} \mp 1\right)^2}$$

قواعد: طريق معرفة الجمع والطرح لجذور جذور الأعداد وتسمى الموسطات: (صفحة ٤٤)

(حيث: A>B في حالة الطرح)

$$\sqrt[4]{A} \mp \sqrt[4]{B}$$

$$= \sqrt[4]{(A+B+2\sqrt{A.B}) + (4\sqrt{A.B}) \mp 2\sqrt{(A+B+2\sqrt{A.B})(4\sqrt{A.B})}}$$

(حيث: A>B)

$$\sqrt[4]{A} \mp \sqrt[4]{B} = \sqrt[4]{\left(\sqrt[4]{\frac{A}{B}} \mp 1\right)^4 . B}$$

تنبيه: (صفحة ٤٥)

يذكر المؤلف بأن قانون جمع الجذور وطرحها يرتكز على علاقة في كتاب **الأصول** لأقليدس وهي:

$(A)^2 = (B+C)^2 = B^2 + C^2 + 2BC$ [حيث: (A=B+C)]

وبالتالي فإن قانون جمع الجذور وطرحها يمكن صياغته على نمط العلاقة السابقة وذلك كما يلي:

(حيث: A>B في حالة الطرح)

$$\sqrt{A} \mp \sqrt{B} = \sqrt{A + B \mp 2\sqrt{A.B}}$$

أمثلة: (صفحة ٤٥):

«**لو قيل:** اجمع جذر اثنين إلى جذر ثمانية عشر»

إن العددين (٢) و(١٨) بينهما اشتراك وذلك لأن:

$$\sqrt{(6)^2} = \sqrt{36} = \sqrt{(18.2)}$$

وكذلك: $$\sqrt{(3)^2} = \sqrt{9} = \sqrt{\frac{18}{2}}$$

وكذلك: $$\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{2}{18}}$$

إذًا يمكن جمع $\sqrt{2}$ و $\sqrt{18}$، وطرح أصغرهما من أكبرهما حتى يصيرا جذر عدد واحد.

- **الطريقة الأولى:**

$$* \sqrt{18} + \sqrt{2} = \sqrt{18 + 2 + 2\sqrt{2.18}}$$
$$= \sqrt{20 + 2.6} = \sqrt{20 + 12} = \sqrt{32}$$

$$* \sqrt{18} - \sqrt{2} = \sqrt{18 + 2 - 2\sqrt{2.18}}$$
$$= \sqrt{20 - 2.6} = \sqrt{20 - 12} = \sqrt{8}$$

- **الطريقة الثانية:**

$$* \sqrt{18} + \sqrt{2} = \sqrt{2\left(\sqrt{\frac{18}{2}} + 1\right)^2} = \sqrt{32}$$

$$* \sqrt{18} - \sqrt{2} = \sqrt{2\left(\sqrt{\frac{18}{2}} - 1\right)^2} = \sqrt{8}$$

مثال: (صفحة ٤٦)

«**فلو قيل:** اجمع جذر ثلاثة إلى جذر اثني عشر»

$$* \ \sqrt{12}+\sqrt{3}=\sqrt{3+12+2\sqrt{3.12}}=\sqrt{27}$$

$$* \ \sqrt{12}-\sqrt{3}=\sqrt{3+12-2\sqrt{3.12}}=\sqrt{3}$$

مثال: (صفحة ٤٧)

«**ولو قيل:** اجمع جذر اثنين إلى جذر ثمانية»

$$*\sqrt{8}+\sqrt{2}=\sqrt{8+2+2\sqrt{8.2}}=\sqrt{18}$$

$$*\sqrt{8}-\sqrt{2}=\sqrt{8+2-2\sqrt{8.2}}=\sqrt{2}$$

أو:

$$*\sqrt{8}+\sqrt{2}=\sqrt{8+2+\sqrt{4.8.2}}=\sqrt{18}$$

$$*\sqrt{8}-\sqrt{2}=\sqrt{8+2-\sqrt{4.8.2}}=\sqrt{2}$$

مثال: (صفحة ٤٧)

«**ولو قيل:** اجمع جذري اثنين إلى ثلاثة أجذار ثمانية»

$$*\sqrt{8}+\sqrt{2}=\sqrt{8+2+\sqrt{4.8.2}}=\sqrt{18}$$

$$*\sqrt{8}-\sqrt{2}=\sqrt{8+2-\sqrt{4.8.2}}=\sqrt{2}$$

مثال: (صفحة ٤٧)

«**ولو قيل:** اجمع نصف جذر ثمانية إلى ثلاثة أرباع جذر اثنين وثلاثين»

$$* \ \tfrac{3}{4}\sqrt{32}+\tfrac{1}{2}\sqrt{8}=\sqrt{18}+\sqrt{2}=\sqrt{32} \qquad *\tfrac{3}{4}\sqrt{32}-\tfrac{1}{2}\sqrt{8}=\sqrt{8}$$

«**أما مالا يكون بينهما اشتراك** فهو ذو اسمين يجمعان بواو العطف، ويطرحان بحذف الاستثناء، والأحسن في مثل ذلك أن يكون الجواب بلفظ السؤال» (صفحة ٥٢).

مثال: (صفحة ٤٧)

«**ولو قيل:** اجمع جذر ستة وجذر عشرة»

فهذان العددان ليس بينهما اشتراك الجواب هو في حالة الجمع:

$$\sqrt{10}+\sqrt{6}$$

وفي حالة الطرح هـو:

$$\sqrt{10}-\sqrt{6}$$

* الجمع بطريق الأعداد المشتركة:

$$\sqrt{10}+\sqrt{6}=\sqrt{10+6+2\sqrt{10.6}}=\sqrt{16+\sqrt{240}}$$

* الطرح بطريق الأعداد المشتركة:

$$\sqrt{10}-\sqrt{6}=\sqrt{10+6-2\sqrt{10.6}}=\sqrt{16-\sqrt{240}}$$

مثال: (صفحة ٤٨)

«**وكذا لو قيل:** اجمع جذر خمسة إلى جذر ستة»

- فالجواب في هذين العددين أيضًا يكون بلفظ السؤال، لأن العددين ليس بينهما اشتراك.

- الجمع بطريق العمل:

$$\sqrt{6}+\sqrt{5}=\sqrt{6+5+2\sqrt{6.5}}=\sqrt{11+\sqrt{120}}$$

- الطرح بطريق العمل:

$$\sqrt{6}-\sqrt{5}=\sqrt{6+5-2\sqrt{6.5}}=\sqrt{11-\sqrt{120}}$$

- مثال: في جمع جذور الجذور: (صفحة ٤٨)

«لو قيل: اجمع جذر جذر ثلاثة إلى جذر جذر ثمانية وأربعين»

الطريقة الأولى: (صفحة ٤٨)

$$\sqrt[4]{48}+\sqrt[4]{3}=?$$

$$A=48+3+2\sqrt{48.3}=51+24=75$$

$$B=4\sqrt{48.3}=4.12=48$$

$$\sqrt[4]{48}+\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{A+B+2\sqrt{A.B}}=\sqrt[4]{75+48+2\sqrt{75.48}}$$

$$=\sqrt[4]{123+120}=\sqrt[4]{243}$$

$$\sqrt[4]{48}-\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{A+B-2\sqrt{A.B}}=\sqrt[4]{75+48-2\sqrt{75.48}}$$
$$=\sqrt[4]{123-120}=\sqrt[4]{3}$$

مثال: (صفحة ٤٩)

«ولو قيل: اجمع جذر جذر ثلاثة إلى جذر جذر ثلاثة وأربعين ومائتين»

$$\sqrt[4]{243}+\sqrt[4]{3}=?$$

$$A=243+3+2\sqrt{243.3}=246+54=300$$

$$B=4\sqrt{243.3}=4.27=108$$

$$* \quad \sqrt[4]{243}+\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{300+108+2\sqrt{300.108}}=\sqrt[4]{408+(2.180)}=\sqrt[4]{768}$$

$$* \quad \sqrt[4]{243}-\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{300+108-2\sqrt{300.108}}=\sqrt[4]{408-(2.180)}=\sqrt[4]{48}$$

(في حالة الطرح)

- طريقة القسمة (صفحة ٤٩):

$$\sqrt[4]{243}+\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{\left[\sqrt[4]{\left(\frac{243}{3}\right)}+1\right]^{4}.3}$$

$$=\sqrt[4]{[\sqrt[4]{81}+1]^{4}.3}=\sqrt[4]{(3+1)^{4}.3}=\sqrt[4]{768}$$

$$\sqrt[4]{243}-\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{\left[\sqrt[4]{\left(\frac{243}{3}\right)}-1\right]^{4}.3}$$

$$=\sqrt[4]{[\sqrt[4]{81}-1]^{4}.3}=\sqrt[4]{(3-1)^{4}.3}=\sqrt[4]{48}$$

مثال: (صفحة ٤٩)

«**ولو قيل:** اجمع جذر جذر خمسة إلى جذر جذر أربعمائة وخمسة»

$\sqrt[4]{405}+\sqrt[4]{5}=?$

$A=405+5+2\sqrt{405.5}=410+2\sqrt{2025}=410+90=500$

$B=4\sqrt{405.5}=180$

$*\ \sqrt[4]{405}+\sqrt[4]{5}=\sqrt[4]{500+180+2\sqrt{500.108}}$

$$=\sqrt[4]{680+2\sqrt{90000}}=\sqrt[4]{680+600}=\sqrt[4]{1280}\sqrt[4]{405}-\sqrt[4]{5}$$

$$=\sqrt[4]{680-600}=\sqrt[4]{80}$$

مثال: (صفحة ٥٠)

«**ولو قيل:** اجمع لنا جذر جذر اثنين إلى جذر جذر مائة واثنين وستين»

$$\sqrt[4]{162}+\sqrt[4]{2}=?$$

$$A=162+2+2\sqrt{162.2}=164+2.18=164+36=200$$

$$B=4\sqrt{162.2}=72$$

$$*\ \sqrt[4]{162}+\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{200+72+2\sqrt{200.72}}=\sqrt[4]{272+240}=\sqrt[4]{512}$$

$$*\ \sqrt[4]{162}-\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{200+72-2\sqrt{200.72}}=\sqrt[4]{272-240}=\sqrt[4]{32}$$

مثال: (صفحة ٥٠)

«**ولو قيل:** اجمع جذر جذر ثمانية إلى جذر جذر نصف»

$$*\ \sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{\frac{1}{2}}=\sqrt[4]{\left[\sqrt[4]{\left(\frac{8}{\frac{1}{2}}\right)}+1\right]^4\cdot\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt[4]{\left(\sqrt[4]{16}+1\right)^4\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt[4]{(3)^4\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt[4]{40\frac{1}{2}}$$

أو :

$$*\ \sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{\frac{1}{2}}=\sqrt[4]{\left[\sqrt[4]{\left(\frac{\frac{1}{2}}{8}\right)}+1\right]^4.8}$$

$$=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}+1\right)^4.8}=\sqrt[4]{40\frac{1}{2}}$$

(في حالة الطرح)

$$*\ \sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{\frac{1}{2}}=\sqrt[4]{\left[\sqrt[4]{\left(\frac{8}{\frac{1}{2}}\right)}-1\right]^4\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$$

مثال: (صفحة ٥١):

«**ولو قيل:** اجمع جذري جذر اثنين وثلاثين إلى نصف جذر جذر اثنين»

$$* \ 2\sqrt[4]{32}+\frac{1}{2}\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{512}+\sqrt[4]{\frac{1}{8}}=?$$

$$A=\left(512+\frac{1}{8}\right)+2\sqrt{512\times\frac{1}{8}}$$

$$=512+\frac{1}{8}+16=528\frac{1}{8}B=4\sqrt{512\times\frac{1}{8}}$$

$$=32 * 2\ \sqrt[4]{32}+\frac{1}{2}\sqrt[4]{2}$$

$$=\sqrt[4]{512}+\sqrt[4]{\frac{1}{8}}=\sqrt[4]{\left(528\frac{1}{8}+32\right)+2\sqrt{528\frac{1}{8}\times 32}}$$

$$=\sqrt[4]{560\frac{1}{8}+2\sqrt{16900}}=\sqrt[4]{560\frac{1}{8}+260}=\sqrt[4]{820\frac{1}{8}}$$

في حالة الطرح:

$$* \ 2\ \sqrt[4]{32}-\frac{1}{2}\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{512}-\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$$

$$=\sqrt[4]{\left(528\frac{1}{8}+32\right)-2\sqrt{528\frac{1}{8}\times 32}}$$

$$=\sqrt[4]{560\tfrac{1}{8}-260}=\sqrt[4]{300\tfrac{1}{8}}$$

- **مثال على جمع عددين ليس بينهما اشتراك:** (صفحة ٥١)

«**إذا قيل لك:** اجمع لنا جذر جذر عشرين إلى جذر <جذر> اثنين، فإذا قسمنا العشرين على الاثنين، كان الخارج عشرة، وهو عدد غير مربع، والجواب هنا كالسؤال»

$$* \ \sqrt[4]{20}+\sqrt[4]{2}=?$$

- **طريقة أولى:**

لايوجد بين العددين اشتراك لأن: $\frac{20}{2}=10$ وهو عدد غير مربع، والجواب كالسؤال.

- **طريقة ثانية**: وذلك بتطبيق القاعدة التالية:

$$* \quad \sqrt[4]{A}+\sqrt[4]{B}=\sqrt{\left(\sqrt[4]{\tfrac{A}{B}}+1\right)^{2}\sqrt{B}}$$ (حيث $(A>B)$)

$$\sqrt[4]{20}+\sqrt[4]{2}=\sqrt{\left(\sqrt[4]{\left(\frac{20}{2}\right)}+1\right)^{2}\sqrt{2}}$$

$$\sqrt[4]{20}+\sqrt[4]{2}=\sqrt{\left(\sqrt{10}+1+2\sqrt[4]{10}\right)\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt[4]{10}+1\right)^{2}\sqrt{2}}=$$

$$=\sqrt{(\sqrt{20}+\sqrt{2}+\sqrt[4]{640})}$$

ويقر المؤلف بأن الطريقة الأولى أخصر، علمًا بأنه لايوجد فعليًا طريقة أولى لأن الجواب بواسطتها كالسؤال.

تنبيه: (صفحة ٥٢)

- **اختبار الجمع**: نريد التأكد من صحة عملية الجمع التالية: $A+B=C$

إذا كان $B = A - C$ أو $A = B - C$ فإن عملية الجمع صحيحة.

- **اختبار الطرح**: نريد التأكد من صحة عملية الطرح التالية: $A-B=C$

إذا كان $A= B + C$ أو $B = C - A$ فإن عملية الجمع صحيحة.

❁❁❁

الفصل الرابع

في القسمة والتسمية للجذور أو لجذور الجذور

(صفحة ٥٣)

* يقدم المؤلف في بداية الفصل قواعد القسمة والتسمية للجذور أو لجذور الجذور التالية:

$$* \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A}{B}} \qquad * \frac{\sqrt[4]{A}}{\sqrt[4]{B}} = \sqrt[4]{\frac{A}{B}} \qquad * \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}} = \sqrt[n]{\frac{A}{B}}$$

ويشترط لإجراء عملية القسمة التساوي في رتبة جذور المقسوم مع رتبة جذور المقسوم عليه.

* **أمثلة قسمة جذر عدد على جذر عدد:** (صفحة ٥٣)

- **مثال:** (الصفحة ٥٣)

«**إذا قيل:** اقسم لنا جذر ستة على جذر ثلاثة».

$$* \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{6}{3}} = \sqrt{2}$$

«**ولو كان العكس**».

$$* \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{3}{6}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

- **مثال:** (الصفحة ٥٣)

«**ولوقيل:** اقسم جذري ثلاثة على جذر خمسة».

$$* \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{4 \times 3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{12}{5}} = \sqrt{2\frac{2}{5}}$$

«**ولو أريد عكسه**».

$$* \ \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{5}{12}} = \sqrt{\frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}}$$

- **مثال:** (الصفحة ٥٤)

«**ولوقيل:** اقسم اثنين على جذر ثلاثة».

$$* \ \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \sqrt{1\frac{1}{3}}$$

«**ولو عكس**».

$$* \ \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

- **مثال:** (الصفحة ٥٤)

«**ولوقيل:** اقسم جذري ثلاثة على ثلاثة أرباع جذر خمسة».

$$* \ \frac{2\sqrt{3}}{{}^{3}\!/_{4}\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2 + \frac{6}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}}} = \sqrt{\frac{12}{2 + \frac{6}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}}} = \sqrt{4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}}$$

«**ولو عكس**».

$$* \ \frac{\frac{3}{4}\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2 + \frac{6}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{8}}$$

– قسمة جذور الجذور على جذور الجذور:

– **مثال:** (الصفحة ٥٤)

«**فلو قيل:** اقسم جذر جذر عشرة على جذر جذر ثلاثة».

$$* \ \frac{\sqrt[4]{10}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{\frac{10}{3}} = \sqrt[4]{3 + \frac{1}{3}}$$

«**ولو أريد عكسه**».

$$* \ \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{10}} = \sqrt[4]{\frac{3}{10}}$$

- **مثال:** (الصفحة ٥٥)

«**ولو قيل:** اقسم جذر جذر اثنين وثلاثين على اثنين».

$$* \ \frac{\sqrt[4]{32}}{2} = \frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{16}} = \sqrt[4]{\frac{32}{16}} = \sqrt[4]{2}$$

«**ولو عكس**».

$$* \ \frac{2}{\sqrt[4]{32}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{32}} = \sqrt[4]{\frac{16}{32}} = \sqrt[4]{1/2}$$

- **مثال:** (الصفحة ٥٥)

«**ولو قيل:** اقسم جذري جذر عشرة على جذري جذر خمسة».

$$* \ \frac{2\sqrt[4]{10}}{2\sqrt[4]{5}} = \frac{\sqrt[4]{160}}{\sqrt[4]{80}} = \sqrt[4]{2}$$

«**ولو عكس**».

$$* \ \frac{2\sqrt[4]{5}}{2\sqrt[4]{10}} = \sqrt[4]{1/2}$$

- **مثال:** (الصفحة ٥٥)

«**ولو قيل:** اقسم ثلاثة أجذار خمسة على ثلثي جذر جذر اثنين».

$$* \ \frac{3\sqrt{5}}{\frac{2}{3}\sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt[4]{2025}}{\sqrt[4]{\frac{1}{3}+\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{9}}} = \sqrt[4]{\frac{2025}{\frac{1}{3}+\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{9}}} = \sqrt[4]{5125+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}}$$

«**ولو عكس**».

$$* \ \frac{\frac{2}{3}\sqrt[4]{2}}{3\sqrt{5}} = \sqrt[4]{\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}}$$

- **مثال:** (الصفحة ٥٥)

«**ولو قيل:** اقسم جذر جذر اثنين على جذر جذر جذر جذر خمسة».

$$* \ \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[8]{5}} = \frac{\sqrt[8]{16}}{\sqrt[8]{5}} = \sqrt[8]{\frac{16}{5}} = \sqrt[8]{3 + \frac{1}{5}}$$

«ولو عكس».

$$* \ \frac{\sqrt[8]{5}}{\sqrt[4]{2}} = \frac{\sqrt[8]{8}}{\sqrt[8]{16}} = \sqrt[8]{\frac{5}{16}} = \sqrt[8]{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}}$$

اختبار القسمة بالضرب:

نريد التأكد من صحة عملية القسمة التالية:

$$* \ \frac{A}{B} = C$$

إذا كان A=C.B فإن عملية القسمة صحيحة.



الفن الثاني
في أعمال المركبات

(الصفحة ٥٧)

المقـدمة

(الصفحة ٥٩)

- **يقدم مؤلف المخطوطة عدة تعريفات منها:**

- **الأعداد أصحاب الأسماء:**

جـذرا عـددين متباينـين مجموعين بالواو، أو عدد وجذر عددٍ كذلك. أي: الأعداد أصحاب الأسماء هي على أحد الشكلين:

$$(\sqrt{n}+\sqrt{m})\ \text{أو}\ (P+\sqrt{m})$$

حيث: P, m, n أعداد صحيحة متباينة، $\sqrt{m}, \sqrt{n}$ أعداد غير صحيحة.

- **منفصلات ذوات الأسماء:**

هي ذوات اسمين استثني أصغرهما من أكبرهما بحرف إلا.

أي: منفصلات ذوات الأسماء من الشكل $(P-\sqrt{m})$ أو $(\sqrt{n}-\sqrt{m})$ أو $(\sqrt{n}-q)$

حيث: $(P>\sqrt{m})$ أو $(\sqrt{n}>\sqrt{m})$ أو $(\sqrt{n}>q)$

❁❁❁

الفصل الأول

في إيجاد ذوات الأسماء

(الصفحة ٦٣)

- **إيجاد النوع الأول من ذوات الأسماء:**

- نفرض: مربع = n ومربع = m، ولدينا:
[(n>m) و[مربع m ≠ (n− m)]

- فيكون النوع الأول من ذوات الأسماء: $\left(\sqrt{n}+\sqrt{(n-m)}\right)$

- **مثال:** $n = 2^2$ و $m = 1^2$، ولدينا $3 = (1^2 < 2^2)$ ومربع $\neq 3 = (2^2 - 1^2)$

فيكون النوع الأول من ذوات الأسماء في هذا المثال:

$$(\sqrt{4}+\sqrt{4-1}) = (2+\sqrt{3})$$

- **إيجاد النوع الثاني من ذوات الأسماء:**

- نفرض: مربع=n ومربع =m ، ولدينا (n>m) و[مربع ≠n(n] [(m(n-m) مربع m)]

- فيكون النوع الثاني من ذوات الأسماء: $\left[\left((n-m)+\sqrt{n(n-m)}\right)\right]$

- **مثال:** $n = 2^2$ و $m = 1^2 \Leftarrow$
[مربع $\neq$ $n - m = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$]
[مربع $\neq$ $n(n-m) = 2^2\ (3) = 12$]
[مربع $\neq$ $m(n-m) = 1^2(3) = 3$]

– فيكون النوع الثاني من ذوات الأسماء في هذا المثال: $(3 + \sqrt{12})$

- إيجاد النوع الثالث من ذوات الأسماء:

– نفرض: مربع = n ومربع = m، ولدينا (n>m) (n−m=P)،

– نختار q بحيث $P \neq q$ و(مربع $\neq$ n.q) و (مربع $\neq$ m.q)

– فيكون النوع الثالث من ذوات الأسماء: $(\sqrt{n.q} + \sqrt{n.q - mq})$

- **مثال:** $n = 2^2$ و $m = 1^2$ ولدينا: $(2^2 > 1^2)$, $(2^2 - 1^2 = 3)$

– نختار $q = 2$ بحيث: $2 \neq 3$ و (مربع $\neq 8 = 2^2.2 =$ n.q)
و (مربع $\neq 2 = 1^2.2 =$ m.q)

فيكون النوع الثالث من ذوات الأسماء في هذا المثال:

$$\sqrt{8} + \sqrt{8 - 2} \Rightarrow (\sqrt{8} + \sqrt{6})$$

- إيجاد النوع الرابع من ذوات الأسماء:

– نفرض: مربع = n ومربع $\neq$ m، ولدينا (n>m)، مربع $\neq$ n−m

– فيكون النوع الرابع من ذوات الأسماء: $(\sqrt{n} + \sqrt{n - m})$

مثال: n=36 و m=12 ولدينا 12 < 36، مربع $\neq$24= 12−36

فيكون النوع الرابع من ذوات الأسماء في هذا المثال:

$$\sqrt{36} + \sqrt{24} \Rightarrow (6 + \sqrt{24})$$

- إيجاد النوع الخامس من ذوات الأسماء:

– نفرض: مربع= n ومربع =m ، ولدينا: (n>m)، مربع $\neq$ n + m

– فيكون النوع الخامس من ذوات الأسماء:

$(\sqrt{n}+\sqrt{n+m})$ أو $(\sqrt{m}+\sqrt{n+m})$

مثال: $n=2^2$ و $m=1^2$ ولدينا $2^2 > 1^2$, مربع $\neq 5 = 1^2 + 2^2$

فيكون النوع الخامس من ذوات الأسماء في هذا المثال: $(\sqrt{5}+2)$

- إيجاد النوع السادس من ذوات الأسماء:

- نفرض: مربع =n ومربع $\neq m$، ولدينا مربع $\neq n + m$

- فيكون النوع السادس من ذوات الأسماء: $(\sqrt{m}+\sqrt{n+m})$

مثال: $n = 1$ و $m=2$ ولدينا $\neq 3 = 2 + 1$

فيكون النوع السادس من ذوات الأسماء في هذا المثال: $(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

- منفصلات ذوات الأسماء:

- منفصل الاسم الأول $(\sqrt{3}-2)$

- منفصل الاسم الثاني $(\sqrt{12}-3)$

- منفصل الاسم الثالث $(\sqrt{6}-\sqrt{8})$

- منفصل الاسم الرابع $(\sqrt{24}-6)$

- منفصل الاسم الخامس $(\sqrt{5}-2)$

- منفصل الاسم السادس $(\sqrt{2}-\sqrt{3})$

❁❁❁

الفصل الثاني

في ضرب ذوات الأسماء ومنفصلاتها

(الصفحة ٦٧)

- **مثال:** (الصفحة ٦٧)

«**فلو قيل:** اضرب خمسة في سبعة وجذر ثلاثة».

$$*5\left(7+\sqrt{3}\right)=(5\times 7)+\left(5\times\sqrt{3}\right)=35+\sqrt{75}*$$

- **مثال:** (الصفحة ٦٧)

«**ولو قيل:** اضرب ستة في جذر ستة وجذر ثمانية».

$$*6\left(\sqrt{6}+\sqrt{8}\right)=\left(6\times\sqrt{6}\right)+\left(6\sqrt{8}\right)=\sqrt{216}+\sqrt{288}*$$

- **مثال:** (الصفحة ٦٨)

«**ولو قيل:** اضرب خمسة وجذر سبعة في اثنين وجذر ستة».

$$\begin{aligned} *\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{6}\right) &= \left(\sqrt{7}\times\sqrt{6}\right)+\left(\sqrt{7}\times 2\right)+\left(5\times\sqrt{6}\right)+(2\times 5)* \\ &= \sqrt{42}+\sqrt{28}+\sqrt{150}+10 \\ &= 10+\sqrt{28}+\sqrt{42}+\sqrt{150} \end{aligned}$$

- **مثال:** (الصفحة ٦٨)

«**وإن قيل:** اضرب ثلاثة في اثنين إلا جذر ثلاثة».

$$*3\left(2-\sqrt{3}\right)=\left(3\times-\sqrt{3}\right)+(3\times 2)=\left(-\sqrt{27}\right)+(6)=6-\sqrt{27}*$$

- **مثال:** (الصفحة ٦٩)

«**ولو قيل:** اضرب ستة إلا جذر خمسة في ثلاثة إلا جذر اثنين».

$$* \ (6-\sqrt{5})(3-\sqrt{2}) = (-\sqrt{5}\times-\sqrt{2}) + (-\sqrt{5}\times 3) + (6\times-\sqrt{2}) + (6\times 3)$$
$$= +\sqrt{10} - \sqrt{45} - \sqrt{72} + 18$$
$$= 18 + \sqrt{10} - \sqrt{72} - \sqrt{45}$$

مثال: (الصفحة ٦٩)

«**ولو قيل:** اضرب ثمانية وجذر سبعة في ستة إلا جذر عشرة».

$$* \ (8+\sqrt{7})(6-\sqrt{10}) = (\sqrt{7}\times-\sqrt{10}) + (\sqrt{7}\times 6) + (8\times-\sqrt{10}) + (6\times 8)$$
$$= \left(-\sqrt{70}\right) + \left(\sqrt{252}\right) + \left(-\sqrt{640}\right) + (48)$$
$$= 48 + \sqrt{252} - \sqrt{640} - \sqrt{70}$$

تنبيهان: (صفحة ٧٠)

التنبيه الأول: (صفحة ٧٠)

$$* \ a \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n . b}$$

مثال: (الصفحة ٧٠)

«**إذا قيل:** اضرب خمسة في أربعة وجذر خمسة وعشرين مأخوذًا جذره».

$$* \ 5\times\sqrt{\left(4+\sqrt{25}\right)} = \sqrt{(5)^2\times\left(4+\sqrt{25}\right)} = \sqrt{(5^2\times 4)+\sqrt{(5)^4 . 25}}$$
$$= \sqrt{100+\sqrt{625\times 25}} = \sqrt{100+\sqrt{15625}}$$
$$= \sqrt{100+125} = \sqrt{225} = 15$$

- **إيضاح المثال السابق:**

$$5\times\sqrt{(4+\sqrt{25})} = 5\times\sqrt{(4+5)} = 5\times\sqrt{9} = 5\times 3 = 15$$

مثال: (الصفحة ٧١)

«**وإن قيل:** اضرب ثلاثة وجذر سبعة مأخوذًا جذره في خمسة وجذر عشرة مأخوذًا جذره».

$$* \sqrt{\left(3+\sqrt{7}\right)} \times \sqrt{(5+\sqrt{10})} = \sqrt{(3+\sqrt{7})(5+\sqrt{10})}$$
$$= \sqrt{(3 \times 5) + (3 \times \sqrt{10}) + (5 \times \sqrt{7}) + (\sqrt{7} \times \sqrt{10})}$$
$$= \sqrt{15+\sqrt{90}+\sqrt{175}+\sqrt{70}} == \sqrt{15+\sqrt{70}+\sqrt{90}+\sqrt{175}}$$

مثال: (الصفحة ٧١)

«**ولو قيل:** اضرب ثلاثة وجذر سبعة مأخوذًا جذر جذر ذلك في اثنين وجذر ستة مأخوذًا جذره».

$$* \sqrt[4]{\left(3+\sqrt{7}\right)} \times \sqrt{(2+\sqrt{6})} = \sqrt[4]{\left(3+\sqrt{7}\right)} \times \sqrt[4]{\left(2+\sqrt{6}\right)^2}$$
$$= \sqrt[4]{\left(3+\sqrt{7}\right)\left(10+\sqrt{96}\right)}$$
$$= \sqrt[4]{(30+\sqrt{672}+\sqrt{700}+\sqrt{864}}$$

التنبيه الثاني: (الصفحة ٧٣)

يشير المؤلف إلى القواعد التالية:

$$* \left(a \mp \sqrt{b}\right)^2 = a^2 \mp 2a\sqrt{b} + b = (a^2+b) \mp 2a\sqrt{b}$$
$$* (a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b}) = a^2 - b$$

مثال: (الصفحة ٧٣)

«مثاله في تربيع ثلاثة وجذر خمسة».

$$* (3+\sqrt{5})^2 = (3^2+5) + 2 \times 3 \times \sqrt{5} = 14 + 2\sqrt{45} = 14 + \sqrt{180}$$

مثال: (الصفحة ٧٣)

«وكذا إذا ربعنا أربعة عشر وجذر مائة وثمانين».

$$* \left(14+\sqrt{180}\right)^2=376+\sqrt{141120}$$

«وفي ضرب المتصل في منفصله وعكسه»: (الصفحة٨٢)

* **مثال**: (الصفحة ٧٤)

«كضرب ثلاثة وجذر خمسة في ثلاثة إلا جذر خمسة».

$$* (3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5}) = 9-\sqrt{45}+\sqrt{45}-5=4$$

- طريقة أخرى:

$$* (3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5}) = (3)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=9-5=4$$

۞۞۞

الفصل الثالث

في القسمة

(الصفحة ٧٥)

- يقدم المؤلف في بداية الفصل قواعد القسمة التالية:

-إذا كان البسط مفردًا:

$$* \frac{a}{(b \mp \sqrt{c})} = \frac{a\,(b \pm \sqrt{c})}{(b \mp \sqrt{c})(b \pm \sqrt{c})}$$ (بحيث: $b > \sqrt{c}$)

أو

$$* \frac{a}{(b \mp \sqrt{c})} = \frac{a}{(b \mp \sqrt{c})(b \pm \sqrt{c})} \times (b \pm \sqrt{c})$$

- أما إذا كان البسط مركبًا:

$$* \frac{(a \mp \sqrt{d})}{(b \mp \sqrt{c})} = \frac{(a \mp \sqrt{d})(b \pm \sqrt{c})}{(b \mp \sqrt{c})(b \pm \sqrt{c})}$$

أو:

$$* \frac{(a \mp \sqrt{d})}{(b \mp \sqrt{c})} = \frac{(a \mp \sqrt{d})}{(b \mp \sqrt{c})(b \pm \sqrt{c})} \times (b \pm \sqrt{c})$$

- وكذلك يقدم المؤلف بعض المبادئ الأولية الضرورية للقسمة:

$$* a \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b} \qquad * \frac{1}{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^n} \cdot b}$$

(حيث: $n>m$)

$$* \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad * \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b^{\frac{n}{m}}}}$$

- الأمثلة: (الصفحة ٧٦)

- **مثال:** (الصفحة ٧٦)

«**لو قيل:** اقسم أربعة وعشرين على ثلاثة وجذر اثني عشر».

$$* \quad \frac{24}{(\sqrt{12}+3)} = \frac{24(\sqrt{12}-3)}{(\sqrt{12}+3)(\sqrt{12}-3)} = \frac{24(\sqrt{12}-3)}{3}$$

$$= \frac{24}{3} \times \left(\sqrt{12}-3\right) = 8\left(\sqrt{12}-3\right) = \sqrt{768} - 24$$

- **مثال:** (الصفحة ٧٦)

«**لو قيل:** اقسم مائة إلا جذر مائة على ستة وجذر ستة عشر».

$$* \quad \frac{100-\sqrt{100}}{6+\sqrt{16}} = \frac{(100-\sqrt{100})(6-\sqrt{16})}{(6+\sqrt{16})(6-\sqrt{16})}$$

$$= \frac{600+\sqrt{1600}-\sqrt{3600}-\sqrt{160000}}{20} = 30+\sqrt{4}-\sqrt{400}-\sqrt{9}$$

- **طريقة ثانية:**

$$* \quad \frac{100-\sqrt{100}}{6+\sqrt{16}} = \frac{(100-\sqrt{100})}{(6+\sqrt{16})(6-\sqrt{16})} \cdot \left(6-\sqrt{16}\right)$$

$$= \frac{(100-\sqrt{100})}{20} \cdot \left(6-\sqrt{16}\right)$$

$$= \left(5-\sqrt{\tfrac{1}{4}}\right)(6-\sqrt{16}) = 30+\sqrt{4}-\sqrt{400}-\sqrt{9} = 9$$

- **امتحان صحة القسمة:** (الصفحة ٧٧)

وهو كالجواب السابق.

$$* \quad \frac{100-\sqrt{100}}{6+\sqrt{16}} = \frac{90}{10} = 9$$

- **مثال:** (الصفحة ٧٧)

«**ولو قيل:** اقسم ثمانية على واحد وجذر اثنين وجذر ثلاثة».

$$* \frac{8}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \frac{8(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}$$
$$= \frac{8}{\sqrt{8}} \times (1+\sqrt{2}-\sqrt{3}) = \sqrt{8}(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}) \Rightarrow$$
$$\frac{8}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})} = 4+\sqrt{8}-\sqrt{24}$$

- **مثال:** (الصفحة ٧٨)

«**ولو قيل:** اقسم ثمانية وجذر ستين على ستة وجذر ثمانية وأربعين».

$$* \ \frac{8+\sqrt{60}}{6+\sqrt{48}} = \frac{(8+\sqrt{60})(\sqrt{48}-6)}{(\sqrt{48}+6)(\sqrt{48}-6)} = \frac{\sqrt{3072}+\sqrt{2880}-48-\sqrt{2160}}{12}$$
$$= \sqrt{21\frac{1}{3}}+\sqrt{20}-\sqrt{15}-4$$

- **مثال:** (الصفحة ٧٨)

«**ولو قيل:** اقسم جذر اثني عشر على جذر جذر ثلاثة وجذر جذر اثني عشر».

$$* \ \frac{\sqrt{12}}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{12}} = \frac{\sqrt{12}(\sqrt[4]{12}-\sqrt[4]{3})}{(\sqrt[4]{12}+\sqrt[4]{3})(\sqrt[4]{12}-\sqrt[4]{3})} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} \times \left(\sqrt[4]{12}-\sqrt[4]{3}\right) =$$
$$= 2\left(\sqrt[4]{12}-\sqrt[4]{3}\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{12}}{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{12}} = \sqrt[4]{192}-\sqrt[4]{48}$$

- **مثال:** (الصفحة ٧٩)

«**ولو قيل:** اقسم ستة وجذر أربعة وعشرين على جذر اثني عشر إلا ثلاثة».

$$* \frac{6+\sqrt{24}}{\sqrt{12}-3} = \frac{(6+\sqrt{24})(\sqrt{12}+3)}{(\sqrt{12}-3)(\sqrt{12}+3)} = \frac{18+\sqrt{432}+\sqrt{216}+\sqrt{288}}{3}$$
$$= 6+\sqrt{24}+\sqrt{32}+\sqrt{48}$$

- **مثال:** (الصفحة ٧٩)

«**ولو قيل:** اقسم أربعة وعشرين إلا جذر ستة على ثلاثة وجذر ثمانية».

$$* \frac{24-\sqrt{6}}{3+\sqrt{8}} = \frac{(24-\sqrt{6})(3-\sqrt{8})}{(3+\sqrt{8})(3-\sqrt{8})} = \frac{72+\sqrt{48}-\sqrt{4608}-\sqrt{54}}{1}$$
$$= 72+\sqrt{48}-\sqrt{4608}-\sqrt{54}$$

- **مثال:** (الصفحة ٨٠)

«**ولو قيل:** اقسم ستة إلا جذر أربعة وعشرين على جذر ثمانية إلا جذر ستة».

$$* \frac{(6-\sqrt{24})}{(\sqrt{8}-\sqrt{6})} = \frac{(6-\sqrt{24})(\sqrt{8}+\sqrt{6})}{(\sqrt{8}-\sqrt{6})(\sqrt{8}+\sqrt{6})} = \frac{(6-\sqrt{24})}{2} \times \left(\sqrt{8}+\sqrt{6}\right)$$

$$= \left(3-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{6}\right) \Rightarrow \frac{(6-\sqrt{24})}{(\sqrt{8}-\sqrt{6})} = \sqrt{72}+\sqrt{54}-\sqrt{48}-6$$

تنبيهان: (الصفحة ٨١)

التنبيه الأول: (الصفحة ٨١)

«اعلم أن الخارج من قسمة عدد على عدد، هو كالخارج من قسمة مسطحي أكبر المقسومين في عدد ثالث على أصغرهما < في ذلك العدد بعينه>، أو كالخارج من قسمة المقسوم على مسطح المقسوم عليه في عدد ثالث، ثم ضرب الخارج في ذلك العدد بعينه».

أي:

$$* \ \frac{a}{b}=\frac{a\times c}{b\times c}=\frac{a}{b\times c}\times(c)$$

(حيث: a>b)

مثال: (الصفحة ٨١)

$$* \ \frac{12}{3}=4\Rightarrow\frac{12\times5}{3\times5}=\frac{60}{15}=4$$

وكذلك:

$$* \ \frac{12}{3}=\frac{12}{(3\times5)}\times5=\frac{4}{5}\times5=4$$

* يشرح المؤلف سبب ضرب المقسوم عليه في منفصله أو متصله وذلك لجعل المقام ذا اسم واحد، وأسهل بسبب القاعدة التالية:

(حيث: a>b)

$$* \ \left(a^2-b^2\right)=(a+b)\,(a-b)$$

التنبيه الثاني: (الصفحة ٨١)

«اعلم أن الخارج من قسمة عدد على عدد، هو كالخارج من قسمة المقسوم على الخارج من ضرب المقسوم عليه في مسطح عددين ما، وضرب الخارج في الحاصل من مسطح ذينك العددين».

- أي يمكن صياغة التنبيه الثاني بشكل رياضي كما يلي:

$$* \ \frac{a}{b}=\frac{a}{b(c\times d)}.(c\times d)$$

- **مثال:** (الصفحة ٨١)

$$* \ \frac{12}{3}=4$$

وكذلك:

$$\frac{12}{3}=\frac{12}{3\times(2\times4)}\times(2\times4)=\frac{12}{24}\times8=\frac{1}{2}\times8=4$$

- **مثال:** (الصفحة ٨٢)

«**إذا قيل لك:** اقسم عشرة على جذر جذر ثمانية وجذر جذر ستة».

$$* \ \frac{10}{\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{6}} = \frac{10\left(\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{6}\right)}{\left(\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{6}\right)\left(\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{6}\right)} = \frac{10}{\left(\sqrt{8}-\sqrt{6}\right)} \times \left(\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{6}\right)$$

$$= \frac{10}{\left(\sqrt{8}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{6}\right)} \times \left(\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{6}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{6}\right)$$

$$= \frac{10}{2} \times \left(\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{6}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{6}\right)$$

$$= 5\left(\sqrt[4]{8}-\sqrt[4]{6}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{6}\right) = \left(\sqrt[4]{5000}-\sqrt[4]{3750}\right)\left(\sqrt{8}+\sqrt{6}\right)$$

$$\frac{10}{\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{6}} = \sqrt[4]{320000}+\sqrt[4]{180000}-\sqrt[4]{240000}-\sqrt[4]{135000}$$

- **مثال:** (الصفحة ٨٣)

«**فلو قيل لك:** اقسم لنا ستة عشر على اثنين وجذر اثنين وجذر عشرة».

$$* \ \frac{16}{2+\sqrt{2}+\sqrt{10}} = \frac{16}{\left(2+\sqrt{2}+\sqrt{10}\right)\left(2+\sqrt{2}-\sqrt{10}\right)} \times \left(2+\sqrt{2}-\sqrt{10}\right)$$

$$= \frac{16}{\left(\sqrt{32}-4\right)} \times \left(2+\sqrt{2}-\sqrt{10}\right)$$

$$= \frac{16}{\left(\sqrt{32}-4\right)\left(\sqrt{32}+4\right)} \times \left(2+\sqrt{2}-\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{32}+4\right)$$

$$\frac{16}{2+\sqrt{2}+\sqrt{10}} = \left(2+\sqrt{2}-\sqrt{10}\right)\left(\sqrt{32}+4\right)$$

$$= 16+\sqrt{128}+\sqrt{32}-\sqrt{160}-\sqrt{320}$$

- **مثال:** (الصفحة ٨٤)

«**ولو قيل:** اقسم سبعة على جذر ثلاثة غير جذر جذر اثنين».

$$* \ \frac{7}{\sqrt{3}-\sqrt[4]{2}} = \frac{7}{\left(\sqrt{3}-\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt[4]{2}\right)} \times \left(\sqrt{3}+\sqrt[4]{2}\right)$$

$$= \frac{7}{3-\sqrt{2}} \times \left(\sqrt{3}+\sqrt[4]{2}\right)$$

$$= \frac{7}{\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)} \times \left(\sqrt{3}+\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) \quad \frac{7}{\sqrt{3}-\sqrt[4]{2}}$$

$$= \left(\sqrt{3}+\sqrt[4]{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right) = \sqrt{6}+\sqrt{27}+\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{162}$$

- **مثال:** (الصفحة ٨٤)

«**إن قيل:** اقسم خمسة وجذر سبعة مأخوذًا جذر ذلك على جذر جذر عشرة».

$$* \ \frac{\sqrt{(5+\sqrt{7})}}{\sqrt[4]{10}} = \frac{\sqrt[4]{32+\sqrt{700}}}{\sqrt[4]{10}} = \sqrt[4]{\frac{32+\sqrt{700}}{10}}$$

$$= \sqrt[4]{3\frac{1}{5}+\sqrt{\frac{700}{100}}} = \sqrt[4]{3\frac{1}{5}+\sqrt{7}}$$

- **مثال:** (الصفحة ٨٥)

«**وإن قيل:** اقسم عشرة وجذر خمسة مأخوذًا جذر ذلك على ثلاثة وجذر ستة مأخوذًا جذر ذلك».

$$* \frac{\sqrt{10+\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{6}}} = \sqrt{\frac{(10+\sqrt{5})}{(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})} \times \left(3-\sqrt{6}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{(10+\sqrt{5})}{3} \times \left(3-\sqrt{6}\right)} \frac{\sqrt{10+\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{6}}}$$

$$= \sqrt{\left(3\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{5}{9}}\right)\left(3-\sqrt{6}\right)}$$

$$= \sqrt{10+\sqrt{5}-\sqrt{66\frac{2}{3}}-\sqrt{3\frac{1}{3}}}$$

- **مثال:** (الصفحة ٨٦)

«**ولو قيل:** اقسم جذر جذر عشرة أو عشرة مأخوذًا جذر جذرها على جذر ستة وجذر ثمانية مأخوذًا جذر جذر ذلك».

$$\frac{\sqrt[4]{10}}{\sqrt[4]{(\sqrt{6}+\sqrt{8})}} = \sqrt[4]{\frac{10(\sqrt{8}-\sqrt{6})}{(\sqrt{8}+\sqrt{6})(\sqrt{8}-\sqrt{6})}}$$

$$= \sqrt[4]{\frac{10\,(\sqrt{8}-\sqrt{6})}{2}} = \sqrt[4]{5\left(\sqrt{8}-\sqrt{6}\right)}$$

$$\frac{\sqrt[4]{10}}{\sqrt[4]{(\sqrt{6}+\sqrt{8})}} = \sqrt[4]{\sqrt{200}-\sqrt{150}}$$

- **مثال:** (الصفحة ٨٧)

«**وإن قيل:** اقسم عشرة وجذر سبعة مأخوذًا جذر ذلك واثنين وجذر ثلاثة على ثلاثة إلا جذر ستة».

$$* \frac{\sqrt{10+\sqrt{7}}+2+\sqrt{3}}{3-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{10+\sqrt{7}}+2+\sqrt{3}}{\sqrt{(3-\sqrt{6})^2}} = \frac{\sqrt{10+\sqrt{7}}+2+\sqrt{3}}{\sqrt{15-\sqrt{216}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(10+\sqrt{7})}{(15-\sqrt{216})}} + \frac{2+\sqrt{3}}{3-\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{(10+\sqrt{7})\,(15+\sqrt{216})}{(15-\sqrt{216})\,(15+\sqrt{216})}} + \frac{2+\sqrt{3}}{3-\sqrt{6}}$$

$$= \sqrt{\frac{(10+\sqrt{7})}{9} \times (15+\sqrt{216})} + \frac{(2+\sqrt{3})\,(3+\sqrt{6})}{(3-\sqrt{6})\,(3+\sqrt{6})}$$

$$= \sqrt{\left(1\frac{1}{9}+\sqrt{\frac{7}{9}\cdot\frac{1}{9}}\right)\left(15+\sqrt{216}\right)} + \frac{(2+\sqrt{3})\,(3+\sqrt{6})}{3}$$

$$= \sqrt{16\frac{2}{3}+\sqrt{19\frac{4}{9}}+\sqrt{18\frac{6}{9}}+\sqrt{266\frac{6}{9}}} + \left(\frac{2}{3}+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\left(3+\sqrt{6}\right)$$

$$\frac{\sqrt{10+\sqrt{7}}+2+\sqrt{3}}{3-\sqrt{6}}$$

$$= \sqrt{16\frac{2}{3}+\sqrt{19\frac{4}{9}}+\sqrt{18\frac{6}{9}}+\sqrt{266\frac{6}{9}}} + 2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2\frac{2}{3}}$$

- **مثال:** (الصفحة **)

«**ولو قيل:** اقسم جذر ثلاثة وجذر عشرة مأخوذًا جذره وثمانية وجذر تسعين مأخوذًا جذر جذره على ثلاثة وجذر ستة».

$$* \quad \frac{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{10}}+\sqrt[4]{8+\sqrt{90}}}{3+\sqrt{6}}$$

$$=\frac{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{10}}+\sqrt[4]{8+\sqrt{90}}}{\sqrt{\left(3+\sqrt{6}\right)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{10}}{15+\sqrt{216}}}+\frac{\sqrt[4]{8+\sqrt{90}}}{\sqrt{15+\sqrt{216}}}$$

$$=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{10}\right)\left(15-\sqrt{216}\right)}{\left(15+\sqrt{216}\right)\left(15-\sqrt{216}\right)}}+\frac{\sqrt[4]{8+\sqrt{90}}}{\sqrt[4]{\left(15+\sqrt{216}\right)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{10}\right)}{9}\times\left(15-\sqrt{216}\right)}+\sqrt[4]{\frac{8+\sqrt{90}}{441+\sqrt{194400}}}$$

$$=\sqrt{\sqrt{\frac{1}{3}\ \frac{1}{9}}+\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\ \frac{1}{9}}}\times\sqrt{\left(15-\sqrt{216}\right)}$$

$$+\sqrt[4]{\frac{8+\sqrt{90}}{441+\sqrt{194400}}}$$

$$=\sqrt{\sqrt{8+\frac{1}{3}}+\sqrt{27+\frac{7}{9}}-\sqrt{8}-\sqrt{26+\frac{2}{3}}}$$

$$+\sqrt[4]{\frac{(8+\sqrt{90})}{81}\times\left(441-\sqrt{194400}\right)}$$

$$=\sqrt{\sqrt{8+\frac{1}{3}}+\sqrt{27+\frac{7}{9}}-\sqrt{8}-\sqrt{26+\frac{2}{3}}+}$$

$$+\sqrt[4]{\left(\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{9}+\sqrt{\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\cdot}\right)\left(441-\sqrt{194400}\right)}$$

$$=\sqrt{\sqrt{8+\frac{1}{3}}+\sqrt{27+\frac{7}{9}}-\sqrt{8}-\sqrt{26+\frac{2}{3}}}$$

$$+\sqrt[4]{43\frac{5}{9}+\sqrt{2667\frac{7}{9}}-\sqrt{2666+\frac{2}{3}}-\sqrt{1896+\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}}}$$



الفصل الرابع

في أخذ جذور ذوات الأسماء والمنفصلات

(صفحة ٩١)

- يذكر المؤلف ثلاث طرق لإيجاد الجذر التربيعي للمقدار:

$\sqrt{A+\sqrt{B}} \Leftarrow \left(A+\sqrt{B}\right)$ (حيث: $A > \sqrt{B}$).

- **الطريقة الأولى:** $\sqrt{A+\sqrt{B}}$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}(A) + \sqrt{\tfrac{1}{4}(A)^2 - \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{B}\right)^2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}(A) - \sqrt{\tfrac{1}{4}(A)^2 - \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{B}\right)^2}}$$

- **الطريقة الثانية:** $\sqrt{A+\sqrt{B}}$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{(A)^2 - \left(\sqrt{B}\right)^2} + A\right]} + \sqrt{\tfrac{1}{2}\left[(A) - \sqrt{(A)^2 - \left(\sqrt{B}\right)^2}\right]}$$

- **الطريقة الثالثة:** $\sqrt{A+\sqrt{B}}$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}(A) + \sqrt{\tfrac{1}{4}\left[(A)^2 - \left(\sqrt{B}\right)^2\right]}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}(A) - \sqrt{\tfrac{1}{4}\left[(A)^2 - \left(\sqrt{B}\right)^2\right]}}$$

- **تؤدي الطرق الثلاث إلى النتيجة ذاتها.**

- **مثاله: في معرفة جذر الاسم الأول:** وهو: اثنان وجذر ثلاثة هكذا:

٢ و حـ٣ (حيث : ٢ > حـ٣)

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{1}{2}(2)+\sqrt{\frac{1}{4}(2)^2-\frac{1}{4}(\sqrt{3})^2}}+\sqrt{\frac{1}{2}(2)-\sqrt{\frac{1}{4}(2)^2-\frac{1}{4}(\sqrt{3})^2}}$$

$$=\sqrt{1+\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}$$

ويسمى المقدار: ذا الاسمين من الستة ويقال له: المرسل.

- جذر الاسم الثاني:

وهو: ثلاثة وجذر اثني عشر هكذا: $\left[3 \text{ و } \overline{12}\right]$ حيث: $\left[3<\overline{12}\right]$

$$\sqrt{3+\sqrt{12}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{12}\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{12}\right)^2-\frac{1}{4}(3)^2}}+\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{12}\right)-\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{12}\right)^2-\frac{1}{4}(3)^2}}$$

$$=\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{\frac{3}{4}}}+\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{\frac{3}{4}}}=$$

$$=\sqrt[4]{3+\tfrac{3}{4}+2\sqrt{3\left(\tfrac{3}{4}\right)}}+\sqrt[4]{3+\tfrac{3}{4}-2\sqrt{3\left(\tfrac{3}{4}\right)}}=\sqrt[4]{\left(6+\tfrac{3}{4}\right)}+\sqrt[4]{\tfrac{3}{4}}$$

ويسمى: ذا الموسطين الأول.

- جذر الاسم الثالث:

وهو: جذر ثمانية وجذر ستة هكذا: $\left[\overline{٨} \text{ و } \overline{٦}\right]$ حيث: $\left[\overline{٨} < \overline{٦}\right]$

$$\sqrt{\sqrt{8}+\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{8}\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{8}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}\right)^2}}$$

$$+\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{8}\right)-\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{8}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}\right)^2}}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{8}\right)+\sqrt{\frac{1}{2}}}+\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{8}\right)-\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

$$= \sqrt[4]{\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{8}\right) + \sqrt{\frac{1}{2}}\right]^2} + \sqrt[4]{\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{8}\right) - \sqrt{\frac{1}{2}}\right]^2} \sqrt{\sqrt{8} + \sqrt{6}}$$

$$= \sqrt[4]{4 + \frac{1}{2}} + \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$$

ويسمى ذا الموسطين الثاني:

– **جذر الاسم الرابع**: والعدد فيه هو الأكبر، وهو ستة وجذر أربعة وعشرين هكذا: ٦ و $\overline{٢٤}$

$$\sqrt{6 + \sqrt{24}} = \sqrt{\frac{1}{2}(6) + \sqrt{\frac{1}{4}(6)^2 - \frac{1}{4}\left(\sqrt{24}\right)^2}} + \sqrt{\frac{1}{2}(6) - \sqrt{\frac{1}{4}(6)^2 - \frac{1}{4}\left(\sqrt{24}\right)^2}}$$

$$\sqrt{6 + \sqrt{24}} = \sqrt{3 + \sqrt{3}} + \sqrt{3 - \sqrt{3}}$$

ويسمى: الأعظم.

– **جذر الاسم الخامس**: والجذر فيه أكبر: وهو اثنان وجذر خمسة هكذا:

٢ و $\overline{٥}$ [حيث: $\overline{٥}$ > ٢]

$$\sqrt{2 + \sqrt{5}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}\right)^2 - \frac{1}{4}(2)^2}} + \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{5}\right)^2 - \frac{1}{4}(2)^2}}$$

$$= \sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{4}}} + \sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}} - \sqrt{\frac{1}{4}}}$$

$$\sqrt{2 + \sqrt{5}} = \sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}} + \sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}}$$

ويسمى: القوي على منطق وموسط.

جذر الاسم السادس: وهو جذر اثنين وجذر ثلاثة هكذا: $\overline{٢}$ و $\overline{٣}$

[حيث: $\overline{٣}$ > $\overline{٢}$]

$$\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}\right)^2}}$$

$$+ \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\sqrt{2}\right)^2}} \quad = \sqrt{\sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}} + \sqrt{\sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}}$$



الفصل الخامس

في اختبار الجذر وامتحان صحته

(صفحة ٩٩)

- إن اختبار الجذر وامتحان صحته يسمى الرد - أي الرد من الجذر إلى المجذور-، لأن من الواضح أن جذر كل عدد إذا ضرب في نفسه خرج ذلك العدد:

$$\left(\sqrt{A}\right)^2 = A$$

- **اختبار جذر الاسم الأول:**

$$\sqrt{(2+\sqrt{3})} = \left(\sqrt{1+\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right) \Rightarrow$$

$$(2+\sqrt{3}) = \left(\sqrt{1+\tfrac{1}{2}} + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)^2$$

$$= \left[\left(\sqrt{1+\tfrac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)^2\right] + \sqrt[2]{1\tfrac{1}{2}} \times \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$2+\sqrt{3} = \left(1+\tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2}\right) + \sqrt[2]{\tfrac{3}{4}} = 2+\sqrt{3}$$

- يشرح المؤلف عملية

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{\frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

- وذلك كما يلي:

$$\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{2\sqrt{\frac{3\times 3}{4\times 4}} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{2\sqrt[2]{\frac{9}{16}} + \frac{3}{2}}$$

$$= \sqrt{2\sqrt{\frac{4}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}} + \frac{3}{2}} = \sqrt{2\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}} = \sqrt{3}$$

- اختبار الاسم الثاني:

$$\sqrt{(3+\sqrt{12})} = \sqrt[4]{(6+\tfrac{3}{4})} + \sqrt[4]{\tfrac{3}{4}} \Rightarrow (3+\sqrt{12}) = \left[\sqrt[4]{(6+\tfrac{3}{4})} + \sqrt[4]{\tfrac{3}{4}}\ \right]^2$$

$$(3+\sqrt{12}) = \left[\sqrt{6+\tfrac{3}{4}} + \sqrt{\tfrac{3}{4}}\right] + 2\sqrt[4]{(6+\tfrac{3}{4})} \times \sqrt[4]{\tfrac{3}{4}}$$

- لإيجاد قيمة الحد الأول نقوم بما يلي :

$$\sqrt{6+\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{2\sqrt{\frac{27\times 3}{4\times 4}} + \frac{27}{4} + \frac{3}{4}}$$

$$= \sqrt{2\sqrt{\frac{81}{16}} + 7\frac{1}{2}} = \sqrt{2\sqrt{5+\frac{1}{2}.\frac{1}{8}} + 7\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2\left(\frac{\sqrt{81}}{\sqrt{16}}\right) + 7\frac{1}{2}} = \sqrt{2\left(\frac{9}{4}\right) + 7\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2\left(2\frac{1}{4}\right) + 7\frac{1}{2}} = \sqrt{4\frac{1}{2} + 7\frac{1}{2}} = \sqrt{12}$$

- لإيجاد قيمة الحد الثاني نقوم بما يلي:

$$2\sqrt[4]{\left(6+\frac{3}{4}\right)} \times \sqrt[4]{\frac{3}{4}} = 2\sqrt[4]{\left(6+\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)} = 2\left(\frac{3}{4}\right) = 3$$

أخيرًا: $3+\sqrt{12} = 3+\sqrt{12}$

إذًا عملية الجذر صحيحة.

- اختبار الاسم الثالث:

$$\sqrt{\left(\sqrt{8+\sqrt{6}}\right)} = \sqrt[4]{\left(4+\frac{1}{2}\right)} + \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \Rightarrow \left(\sqrt{8}+\sqrt{6}\right)$$

$$= \left[\sqrt[4]{\left(4 + \frac{1}{2}\right)} + \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \right]^2$$

- لإيجاد قيمة الحد الأول نقوم بمايلي:

$$\sqrt{4 + \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2\sqrt{\frac{9 \times 1}{2 \times 2}} + \frac{9}{2} + \frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{2\sqrt{2\frac{1}{4}} + 5} = \sqrt{2\left(1\frac{1}{2}\right) + 5} = \sqrt{3 + 5} = \sqrt{8}$$

وهو الجزء الأول.

- لإيجاد قيمة الحد الثاني نقوم بما يلي:

$$2\left(\sqrt[4]{4 + \frac{1}{2}}\right)\left(\sqrt[4]{\frac{1}{2}}\right) = 2\left[\sqrt[4]{\left(\frac{9}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}\right]$$

$$= 2\sqrt[4]{\left(2\frac{1}{4}\right)} = 2\sqrt{1\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$$

وهو الجزء الثاني.

أخيرًا: $\sqrt{8} + \sqrt{6} = \sqrt{8} + \sqrt{6}$

إذًا عملية الجذر صحيحة.

- **اختبار الاسم الرابع:**

$$\sqrt{\left(6 + \sqrt{24}\right)} = \sqrt{\left(3 + \sqrt{3}\right)} + \sqrt{\left(3 - \sqrt{3}\right)} \Rightarrow \left(6 + \sqrt{24}\right)$$

$$= \left[\sqrt{\left(3 + \sqrt{3}\right)} + \sqrt{\left(3 - \sqrt{3}\right)}\right]^2$$

لإيجاد قيمة الحد الأول نقوم بما يلي:

$$\left[\sqrt{\left(3+\sqrt{3}\right)}\right]^2+\left[\sqrt{\left(3-\sqrt{3}\right)}\right]^2$$

$$=3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}=3+3=6$$

وهو الجزء الأول.

لإيجاد قيمة الحد الثاني نقوم بما يلي:

$$2\left[\sqrt{\left(3+\sqrt{3}\right)}\right]\left[\sqrt{\left(3-\sqrt{3}\right)}\right]=2\sqrt{(9-3)}=2\sqrt{6}=\sqrt{24}$$

وهو الجزء الثاني.

أخيرًا: $6+\sqrt{24}=6+\sqrt{24}$

إذًا عملية الجذر صحيحة.

- اختبار الاسم الخامس:

$$\sqrt{\left(2+\sqrt{5}\right)}=\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{1}{4}}}+\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}-\sqrt{\frac{1}{4}}}\Rightarrow$$

$$\left(2+\sqrt{5}\right)=\left[\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{1}{4}}}+\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}-\sqrt{\frac{1}{4}}}\right]^2$$

- لإيجاد قيمة الحد الأول (الاسم الأكبر) نقوم بما يلي:

$$\left(\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{1}{4}}}\right)^2+\left(\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}}-\sqrt{\frac{1}{4}}}\right)^2=$$

$$=\left(\sqrt{1\frac{1}{4}}+\sqrt{\frac{1}{4}}\right)+\left(\sqrt{1\frac{1}{4}}-\sqrt{\frac{1}{4}}\right)$$

$$= \sqrt{1\frac{1}{4}} + \sqrt{1\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} + \sqrt{\frac{5}{4}} = \sqrt{2\sqrt{\frac{5\times 5}{4\times 4}} + \frac{5}{4} + \frac{5}{4}}$$

$$= \sqrt{2\left(1\frac{1}{4}\right) + \frac{10}{4}} = \sqrt{2\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

- لإيجاد قيمة الحد الثاني (الاسم الأصغر) نقوم بما يلي:

$$2\left(\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{4}}}\right)\left(\sqrt{\sqrt{1\frac{1}{4}} - \sqrt{\frac{1}{4}}}\right)$$

$$= 2\left(\sqrt{\sqrt{\frac{5}{4}} + \sqrt{\frac{1}{4}}}\right)\left(\sqrt{\sqrt{\frac{5}{4}} - \sqrt{\frac{1}{4}}}\right)$$

$$= 2\left(\sqrt{\sqrt{\frac{5}{4}} + \sqrt{\frac{1}{4}}}\right)\left(\sqrt{\sqrt{\frac{5}{4}} - \sqrt{\frac{1}{4}}}\right)$$

$$2\sqrt{\sqrt{\frac{25}{16}} - \sqrt{\frac{5}{16}} + \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{\frac{1}{16}}} = 2\sqrt{\sqrt{\frac{25}{16}} - \sqrt{\frac{1}{16}}}$$

$$= 2\sqrt{\sqrt{1 + \frac{4}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}} - \sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}}}$$

$$= 2\sqrt[4]{1 + \frac{4}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8} = 2\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\left(1 + \frac{4}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\right)}}$$

$$= 2\sqrt[4]{1 + \frac{5}{8} - 2\sqrt{\frac{1}{16}\left(1 + \frac{4}{8} + \frac{1}{16}\right)}}$$

$$= 2\sqrt[4]{1 + \frac{5}{8} - 2\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{4}{16\times 8} + \frac{1}{16\times 16}}}$$

$$= 2\sqrt[4]{1 - \frac{5}{8} - 2\sqrt{\frac{25}{16 \times 16}}} = 2\sqrt[4]{1 + \frac{5}{8} - 2\left(\frac{5}{16}\right)}$$

$$= 2\sqrt[4]{1 - \frac{5}{8} - 2\left(\frac{2}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}\right)} = 2\sqrt[4]{1 + \frac{5}{8} - \frac{5}{8}} = 2\sqrt[4]{1} = 2$$

أخيرًا $\sqrt{5} + 2 = \sqrt{5} + 2$ إذًا عملية الجذر صحيحة.

– اختبار الاسم السادس:

$$\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \sqrt{\sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}} + \sqrt{\sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}} \Rightarrow \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)$$

$$= \left[\sqrt{\sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}} + \sqrt{\sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}}\right]^2$$

– لإيجاد قيمة الاسم الأكبر نقوم بما يلي:

$$\left(\sqrt{\sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}}\right)^2 = \sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 2\sqrt{\frac{3 \times 3}{4 \times 4}}}$$

$$= \sqrt{1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

– لإيجاد قيمة الاسم الأكبر نقوم بما يلي:

$$2\left(\sqrt{\sqrt{\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}}\right)\left(\sqrt{\sqrt{\frac{3}{4}} - \frac{1}{2}}\right)$$

$$= 2\left(\sqrt{\sqrt{\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}}\right)\left(\sqrt{\sqrt{\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 2\sqrt{\sqrt{\frac{9}{16}}-\sqrt{\frac{3}{16}}+\sqrt{\frac{3}{16}}-\sqrt{\frac{1}{16}}}$$

$$= 2\sqrt{\sqrt{\frac{4}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}}-\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}}+\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}}-\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}}}$$

$$= 2\sqrt{\sqrt{\frac{4}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}}-\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}}}$$

$$= 2\sqrt[4]{\left(\frac{4}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\right)-2\sqrt{\left(\frac{4}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\right)}}$$

$$= 2\sqrt[4]{\frac{5}{8}-2\sqrt{\frac{9}{16\times 16}}} = 2\sqrt[4]{\frac{5}{8}-2\left(\frac{3}{16}\right)}$$

$$= 2\sqrt[4]{\frac{5}{8}-2\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\right)} = 2\sqrt[4]{\frac{5}{8}-\frac{3}{8}} = 2\sqrt[4]{\frac{2}{8}}$$

$$= 2\sqrt[4]{\frac{1}{4}} = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{2}$$

أخيرًا: $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$

إذًا عملية الجذر صحيحة.



الخاتمة

في معرفة أعمال الكعوب

(صفحة ١٠٧)

– **المقدمة**: (صفحة ١٠٧).

يشرح الموضوعات المدروسة في الخاتمة، ويعطي بعض التعريفات وهي:

إن **الكعب**، ويسمى الضلع، هو أحد ثلاثة أضلاع متساوية، يكون من مسطحها مكعب ذلك الكعب، أي:

A = الكعب= الضلع.

A^3 = المكعب= $A^2 \cdot A = A^2 \cdot \sqrt{A^2}$

نفرض $A=2$ = كعب ⇐ $8 = 2 \times 2 \times 2 = A^3$ مكعب الاثنين

والمكعب: مجسم ذو أبعاد ثلاثة متساوية، والكعب واحد تلك الأبعاد أي:

$$\sqrt[3]{A^3} = A$$

أمثلة: $* \sqrt[3]{3+\frac{3}{8}} = 1\frac{1}{2}$ $* \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$ $* \sqrt[3]{8} = 2$

$* (5)^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125 \Rightarrow \sqrt[3]{125} = 5$

– **مثال**: « **فإن قيل**: كعبا ثمانية أو ضعف كعب ثمانية لأي عدد يكون كعبًا؟ » (صفحة ١١٠).

$*2\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{(2)^3 \times 8} = \sqrt[3]{8 \times 8} = \sqrt[3]{64}$

$= 4 \Rightarrow A\sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{A^3 \times B}$

- **مثال:« ولو قيل:** ثلاثة كعوب سبعة لأي عدد يكون كعبًا؟ »(صفحة ١١٠).

$$*3\sqrt[3]{7} = 3\sqrt[3]{(3)^3 \times 7} = \sqrt[3]{27 \times 7} = \sqrt[3]{189}$$

- **مثال:« فإن قيل:** ستة عشر كعبه ونصف كعبه لأي عدد يكون كعبًا؟ » (صفحة ١١٠).

$$*\left(1\frac{1}{2}\right)\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{\left(1\frac{1}{2}\right)^3 \times 16} = \sqrt[3]{\left(3\frac{3}{8}\right)^3 \times 16} = \sqrt[3]{54}$$

- **مثال:« ولو قيل:** نصف كعب اثنين وسبعين لأي عدد يكون كعبًا؟ » (صفحة ١١٠).

$$*\frac{1}{2}\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 72} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)(72)} = \sqrt[3]{9}$$

- **مثال:« وأما إذا قيل:** كعب تسعين لأي عدد يكون ثلاثة أمثال؟ أو ثلث كعب تسعين لأي عدد يكون كعبًا؟ » (صفحة ١١٠).

$$*\frac{1}{3}\sqrt[3]{90} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^3 \times 90} = \sqrt[3]{\frac{90}{27}} = \sqrt[3]{3\frac{1}{3}} \Rightarrow \sqrt[3]{90} = 3\sqrt[3]{3\frac{1}{3}}$$

- **مثال:« ولو قيل:** ثلاثة أمثال كعب عشرة لأي عدد يكون كعبًا؟ أو كعب عشرة ثلث لأي عدد يكون؟ » (صفحة ١١١).

$$3\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{(3)^3 \times 10} = \sqrt[3]{27 \times 10} = \sqrt[3]{270}$$

- **مثال:« فلو قيل:** ثلاثة كعوب سبعة يكون نصفًا لأي عدد يكون؟ أو ستة كعوب سبعة لأي عدد يكون كعبًا؟ » (صفحة ١١١).

$$\frac{\sqrt[3]{(3)^3 \times 7}}{1/2} = \sqrt[3]{(3)^3 \times 7 \times (2)^3} = \sqrt[3]{27 \times 7 \times 8} = \sqrt[3]{1512}$$

$$*\sqrt{(6)^3 \times 7} = \sqrt[3]{216 \times 7} = \sqrt[3]{1512}$$

- **مثال:**« **فلو قيل:** نصف كعب ألف وخمسمائة واثني عشر ثلاثة أمثال أي عدد يكون؟أو كعب ألف وخمسمائة واثني عشر ستة أمثال أي عدد يكون؟ » (صفحة ١١٢).

$$*\frac{1}{2}.\frac{1}{3}\sqrt[3]{1512} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}.\frac{1}{3}.\frac{1}{9}(1512)} = \sqrt[3]{7}$$

$$*\frac{1}{2}.\frac{1}{3}\sqrt[3]{1512} = \frac{1}{6}\sqrt[3]{1512} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{6}\right)^3 \times (1512)} == \sqrt[3]{7}$$



الفصل الأول

<من الخاتمة> في ضرب الكعوب

(الصفحة ١١٣)

- يعطي المؤلف في بداية الفصل القاعدة التالية: $*\sqrt[3]{A}.\sqrt[3]{B}=\sqrt[3]{A.B}$

● **مثال:**« **مثاله:** اضرب كعب سبعة في كعب خمسة » (صفحة ١١٣).

$$*\sqrt[3]{7}.\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{7\times 5}=\sqrt[3]{35}$$

● **مثال:**« **ولو قيل:** اضرب اثنين في كعب ستة » (صفحة ١١٣).

$$*2\sqrt[3]{6}=\sqrt[3]{(2)^3\times 6}=\sqrt[3]{48}$$

● **مثال:**« **ولو قيل:** اضرب كعبي اثنين في كعب ثلاثة » (صفحة ١١٣).

$$*\left(2\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{3}\right)=\sqrt[3]{16}.\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{16\times 3}=\sqrt[3]{48}$$

● **ولو عكست:** $*\left(2\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{2}\right)=\sqrt[3]{24}.\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{24\times 2}=\sqrt[3]{48}$

● **مثال:**« **ولو قيل:** اضرب كعبي اثنين في ثلاثة كعوب ثلاثة؟ » (صفحة ١١٣).

$$*\left(2\sqrt[3]{2}\right)\left(3\sqrt[3]{3}\right)=\sqrt[3]{16}\times\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{16\times 81}=\sqrt[3]{1296}$$

● **مثال:**« **وإن قيل:** اضرب نصف كعب أربعة في ثلاثة كعوب خمسة » (صفحة ١١٤).

$$*\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}\right)\left(3\sqrt[3]{5}\right)=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 4}\times\sqrt[3]{(3)^3\times 5}$$

$$=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\times\sqrt[3]{135}=\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)(135)}=\sqrt[3]{67\frac{1}{2}}$$

❁❁❁

الفصل الثاني

<من الخاتمة> في القسمة

(الصفحة ١١٥)

يعتمد المؤلف في بداية الفصل **القاعدة التالية**:

$$*\frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}}=\sqrt[3]{\frac{A}{B}}$$

ثم يعطي المؤلف الأمثلة التالية:

- « **فإذا قيل**: اقسم كعب سبعة على كعب عشرة » (صفحة ١١٥).

$$*\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{10}}=\sqrt[3]{\frac{7}{10}}$$

- « **ولو قيل**: اقسم كعب عشرين على كعب ثلاثين » (صفحة ١١٥).

$$*\frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{30}}=\sqrt[3]{\frac{20}{30}}=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

- « **وإن قيل**: اقسم لنا كعب ستة على كعب اثنين » (صفحة ١١٥).

$$*\frac{\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\frac{6}{2}}=\sqrt[3]{3}$$

- « **ولو قيل**: اقسم نصف كعب ستة عشر على كعب أربعة » (صفحة ١١٥).

$$*\frac{\frac{1}{2}\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[3]{\frac{16}{8}}}{\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{\frac{2}{4}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

- « **ولو قيل**: اقسم كعب عشرة على ثلث كعب أربعين وخمسمائة » (صفحة ١١٥).

$$*\frac{\sqrt[3]{10}}{\frac{1}{3}\sqrt[3]{540}}=\frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{20}}=\sqrt[3]{\frac{10}{20}}=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

۞۞۞

الفصل الثالث

<من الخاتمة>
في جمع الكعوب وطرحها

(الصفحة ١١٧)

يحدد المؤلف شرط جمع الكعوب وطرحها بقوله: "في جمع الكعوب وطرحها اعلم أنه لا يمكن جمع كعب مع كعب حتى يصيرا كعب عدد واحد، ولا طرح كعب من كعب حتى يصير الباقي كعب عدد واحد، إلا إذا كان بين الكعبين اشتراك، أعني تكون نسبة أحدهما إلى الآخر كنسبة عدد مكعب إلى عدد مكعب، لأن النسبة بين كل مكعبين متواليين أو غير متواليين مكعبة".

- أي لا يمكن إيجاد قيمة المقدار التالي: $\left(\sqrt[3]{A} \mp \sqrt[3]{B}\right)$ إلا إذا كان $\frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{B}} = \sqrt[3]{\frac{C^3}{D^3}}$ أي يوجد بين المكعبين اشتراك.

- **وأما طريقة معرفة الاشتراك فهي أن يتحقق أحد الشروط التالية:**

إما $(1)\ \frac{A^3}{B^3} = E^3$ أو $(2)\ A^3.(B^3)^2 = F^3$ أو $(3)\ B^3.(A^3)^2 = G^3$

وعندما يتحقق الاشتراك يمكننا جمع أو طرح المقدار السابق بإحدى الطريقتين:

(حيث: $A > B$)

$$1)\ \sqrt[3]{A} \mp \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{\left[\sqrt[3]{\frac{A}{B}} \mp 1\right]^3 \times B}$$

(حيث: $A > B$)

$$2)\ \sqrt[3]{A} \mp \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{\left(3\sqrt[3]{B^2 \times A} + A\right) \mp \left(3\sqrt[3]{A^2 \times B} + B\right)}$$

- ثم يعطي المؤلف قاعدة خاصة لجمع الكعوب المكررة، وذلك كما يلي:

$$\sqrt[3]{A}+D\sqrt[3]{B}=\sqrt[3]{\left[\sqrt[3]{\frac{A}{B}}\times C+(D\times 1)\right]^{3}\times B}$$

ثم يعطي المؤلف الأمثلة التالية:

- « **مثال ذلك**: تريد أن تجمع كعب اثنين وثلاثين إلى كعب أربعة » (صفحة ١١٨).

$$*\ \sqrt[3]{32}+\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{\frac{32}{4}}+1\right)^{3}\times 4}=\sqrt[3]{108}$$

$$*\ \sqrt[3]{32}+\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{\frac{32}{4}}-1\right)^{3}\times 4}=\sqrt[3]{4}$$

- « **وإن قيل**: اجمع كعب سبعة وعشرين إلى كعب ثمانية » (صفحة ١١٨).

$$\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{3\sqrt[3]{(8)^{2}\times 27}+3\sqrt[3]{(27)^{2}\times 8}+27+8}$$

$$=\sqrt[3]{3\sqrt[3]{1728}+3\sqrt[3]{5832}+35}$$

$$=\sqrt[3]{(3\times 12)+(3\times 18)+35}=\sqrt[3]{36+54+35}=\sqrt[3]{125}=5$$

- « **وإن أريد**: طرح كعب ثمانية من كعب سبعة وعشرين » (صفحة ١١٨).

$$\sqrt[3]{27}-\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{\left[3\sqrt[3]{(8)^{2}\times 27}+(27)\right]-\left[3\sqrt[3]{(27)^{2}\times 8}+(8)\right]}$$

$$=\sqrt[3]{63-62}=\sqrt[3]{1}=1$$

- « **ولو قيل**: اجمع كعبي أربعة وعشرين إلى ثلاثة كعوب ثلاثة » (صفحة ١١٩).

- طريقة أولى:

$$*\,2\sqrt[3]{24}+3\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{\left[\sqrt[3]{\frac{24}{3}}\times 2+(3\times 1)\right]^{3}\times 3}=\sqrt[3]{1029}$$

- طريقة ثانية:

$$*\,2\sqrt[3]{24}+3\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{\left[\sqrt[3]{\frac{3}{24}}\times 3+(2\times 1)\right]^{3}\times 24}$$

$$=\sqrt[3]{\left[\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\times 3+2\right]^{3}\times 24}$$

$$=\sqrt[3]{\left[\frac{1}{2}\times 3+2\right]^{3}\times 24}=\sqrt[3]{1029}$$

- طريقة ثالثة:

$$*\,2\sqrt[3]{24}+3\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{192}+\sqrt[3]{81}$$

$$=\sqrt[3]{3\sqrt[3]{(81)^{2}\times 192}+3\sqrt[3]{(192)^{2}\times 81}+192+81}$$

$$=\sqrt[3]{3\sqrt[3]{6561\times 192}+3\sqrt[3]{36864\times 81}+273}$$

$$*\,2\sqrt[3]{24}+3\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3\sqrt[3]{1259712}+3\sqrt[3]{2985984}+273}$$

$$=\sqrt[3]{(3\times 108)+(3\times 144)+273}$$

$$=\sqrt[3]{324+432+273}=\sqrt[3]{756+273}=\sqrt[3]{1029}$$

- « **ولو قيل:** اجمع ثلث كعب ثمانية وأربعين إلى نصف كعب ستة » (صفحة ١٢٠).

- طريقة أولى:

$$* \frac{1}{3}\sqrt[3]{48} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{6\left[\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{48}{6}} + \frac{1}{2}(1)\right]^3}$$

$$= \sqrt[3]{6\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)^3} = \sqrt[3]{6\left(\frac{7}{6}\right)^3} = \sqrt[3]{6\left(1+\frac{1}{6}\right)^3}$$

$$= \sqrt[3]{6\left(1-\frac{3}{6}+\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)} = \sqrt[3]{9+\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}$$

- طريقة ثانية:

$$* \frac{1}{3}\sqrt[3]{48} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{48\left[\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{6}{48}} + \frac{1}{3}(1)\right]^3}$$

$$= \sqrt[3]{48\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)^3} = \sqrt[3]{9+\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}$$

- طريقة ثالثة:

$$* \frac{1}{3}\sqrt[3]{48} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{1+\frac{7}{9}} + \sqrt[3]{\frac{3}{4}} = ...$$

- « **ولو قيل:** اجمع كعبي ثلاثة إلى نصف كعب أحد وثمانين » (صفحة ١٢١).

$$*2\sqrt[3]{3} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{81} = \sqrt[3]{3\left[\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{81}{3}} + 2\right]^3} = \sqrt[3]{3\left[\frac{1}{2}(3) + 2\right]^3}$$

$$= \sqrt[3]{3\left(1\frac{1}{2}+2\right)^3} = \sqrt[3]{3\left(3\frac{1}{2}\right)^3} = \sqrt[3]{3\left(42\frac{7}{8}\right)} = \sqrt[3]{128\frac{5}{8}}$$

- « **فإن قيل لك:** اجمع< كعب> أربعة وعشرين إلى كعب أربعة » (صفحة ١٢١).

يقول المؤلف: «إن هذين الكعبين لا يجتمعان ولا يسقط الأقل من الأكثر».

● « **ولو قيل**: اطرح كعب تسعة من ثلاثة أرباع كعب اثنين وسبعين »
(صفحة ١٢١).

- **طريقة أولى**:
$$*\ \frac{3}{4}\sqrt[3]{72}-\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{9\left[\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{72}{9}}-1\right]^{3}}=\sqrt[3]{9\left[1\frac{1}{2}-1\right]^{3}}$$
$$=\sqrt[3]{9\left(\frac{1}{2}\right)^{3}}=\sqrt[3]{9\left(\frac{1}{8}\right)}=\sqrt[3]{1+\frac{1}{8}}$$

- **طريقة ثانية**:
$$*\ \frac{3}{4}\sqrt[3]{72}-\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{72\left[\frac{3}{4}-\sqrt[3]{\frac{9}{72}}\right]^{3}}=\sqrt[3]{72\left(\frac{1}{4}\right)^{3}}$$
$$=\sqrt[3]{72\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\right)}=\sqrt[3]{1+\frac{1}{8}}$$

تنبيه: (الصفحة ١٢٢)

يعطي المؤلف القاعدة التالية بالشكلين التاليين:

$$1)A^{3}=(B+C)^{3}=B.B^{2}+C.C^{2}+3B^{2}.C+3C^{2}B$$

مثال:

$$(5)^{3}=(3+2)^{3}=(3\times 3^{2})+(2\times 2^{2})$$
$$+(3\times 3^{2}\times 2)+(3\times 2^{2}\times 3)=27+8+54+36=125$$

$$2)A^{3}=(B+C)^{3}=B^{3}+C^{3}+3B.C+3C^{2}.B$$

مثال:

$$(5)^{3}=(3+2)^{3}=(3^{3})+(2^{3})+(3\times 3^{2}\times 2)+(3\times 2^{2}\times 3)$$
$$=27+8+54+36=125$$

❁❁❁

الفصل الرابع

في معرفة استخراج كعب العدد منطقه وأصمه: صحيحه وكسره

(الصفحة ١٢٣)

يعرف المؤلف الكعب بما يلي: « إن الكعب: هو طلب مقدار نسبة مكعبه إليه كنسبة مربعه إلى الواحد » (صفحة ١٢٣).

- **الكعب(أي الجذر التكعيبي)**: هو طلب مقدار "A" بحيث يكون:

$$\frac{A^3}{A} = \frac{A^2}{1}$$

– ويفسر المؤلف التعريف السابق بتقديم المثال التالي:

$$\frac{8}{2} = \frac{4}{1} \Rightarrow \frac{(2)^3 = 8 = 4(2)}{2} = \frac{4}{1}$$

ثم يقسم الأعداد إلى صنفين: أعداد مكعبة وأعداد غير مكعبة، ويشير أيضًا إلى أن مكعبات الأعداد الفردية فردية أيضًا، وكذلك مكعبات الأعداد الزوجية زوجية أيضًا.

يحدد المؤلف شروط مقدار آحاد المكعب ومقدار آحاد جذره التكعيبي:

- **إذا كان آحاد المكعب**: ١ أو ٤ أو ٥ أو ٦ ⇐ فإن آحاد جذره التكعيبي كذلك.

- **إذا كان آحاد المكعب**: ٧ ⇐ فإن آحاد جذره التكعيبي /٣/ وبالعكس.

- **إذا كان آحاد المكعب**: ٨ ⇐ فإن آحاد جذره التكعيبي /٢/ وبالعكس.

- إذا كان آحاد المكعب: ٩ ⟸ فإن آحاد جذره التكعيبي /٩/

- إذا كان في أول المكعب ثلاثة أصفار ⟸ فإن آحاد جذره التكعيبي صفرٌ.

- ويضع المؤلف الشروط التي إذا تحققت لم يكن للعدد جذرٌ تكعيبيّ:

$1)X' \equiv X' \pmod{7}$ بحيث $X' \neq 1, 6$

$2)X' \equiv X' \pmod{8}$ بحيث $X' \neq 1, 3, 5, 7$

$3)X' \equiv X' \pmod{9}$ بحيث $X' \neq 1, 8$

وفي غير ذلك من الحالات فيمكن أن يكون للعدد مكعبٌ.

- ويذكر المؤلف أن مرتبة الآحاد منطقة – أي مكعبة– والمرتبة الرابعة مكعبة....، وهكذا.

- يشرح المؤلف مراحل طريقة استخراج كعب عدد مفروض منطق أو أصم وبالتفصيل، وقد وضح الطريقة بأمثلة.

- **مثال ذلك:** أردنا كعب عدد أحد وأربعين ألف ألف وثلاثة وستين ألفًا وستمائة وخمسة وعشرين» (صفحة ١٢٥).

- نضع العدد بين خطين متوازيين، ونعلم المراتب المنطقة بأصفار تحتها، على هذه الصورة:

السطر الأعلى	→		3						
		4	1	0	6	3	6	2	5
السطر الأوسط	→		9			0			0
السطر الأسفل	→		3						
			9						

- نبحث عن عدد مكعبه يساوي (٤١) أو أقل فنجده العدد (٣)، أثبتنا العدد (٣)أعلى السطر الأعلى فوق المرتبة المنطقة الأخيرة وأسفل الخط أيضًا، ثم ضربنا الأعلى (٣) في الأسفل (٣) فكان تسعة أثبتناها في السطر الأوسط، ثم ضربنا

هذا المثبت في الأعلى فكان (٢٧) أسقطنا ذلك العدد من المرتبة المنطقة أي:

$$41 - (9 \times 3) = 41 - 27 = 14$$

- فأثبتنا (١٤) مكان (٤١)، ثم ضعفنا الثلاثة السفلى فكانت ستة،فضربناها في العليا، فكانت ثمانية عشر زدنا ذلك على السطر الأوسط، وهو تسعة، فكانت سبعة وعشرين أي:

$$(3 \times 2)3 + 9 = (6)3 + 9 = 18 + 9 = 27$$

- فأثبتناها في الأوسط مكان التسعة، ثم زدنا الأعلى على ضعف الأسفل، فكان تسعة، فأثبتناها أسفل مكان ما قبلها، أي على هذه الصورة:

	3						
1	4	0	6	3	6	2	5
2	7			0			0
	9						

- ثم حولنا الأوسط مرتبة إلى جهة اليمين، والسطر الأسفل مرتبتين إلى جهة اليمين، ثم فرضنا عددًا ووضعناه فوق المرتبة المنطقة التي تلي الأخيرة من جهة اليمين وأسفلها، وهو أربعة، على هذه الصورة:

	3			4			
1	4	0	6	3	6	2	5
	2	7		0			0
			9	4			
				8			

- ثم ضربنا أول مراتب الأعلى، وهو (٤) في جميع مراتب الأسفل، وهو (٩٤)، فكان الحاصل (٣٧٦)، زدناه على ما في السطر الأوسط، وهو (٢٧٠٠)، فكان المجتمع (٣٠٧٦) فأثبتناه في السطر الأوسط، ثم ضربنا هذا المثبت في أول مراتب الأعلى وهو(٤)، فكان الخارج (١٢٣٠٤)، أسقطنا ذلك من سطر العدد وأول ذلك المرتبة المنطقة التي هي تحت الأربعة، فكان الفاضل (١٧٥٩)،

فوضعنا ذلك في مراتبه، فيمكن تمثيل العمليات الحسابية كما يلي:

$$14063 - 4(4 \times 94 + 2700) = 14063 - 4(376 + 2700) = 14063 - 4(3076) = 14063 - 12304 = 1759$$

- ثم ضعّفنا أول مراتب الأسفل(٤) فكان(٨) وأثبتناها مكان الأربعة، ثم ضربنا جميع مراتب الأسفل وهو(٩٨) في أول مراتب السطر الأعلى وهو (٤) فكان خارج الضرب (٣٩٢)، زدناه على السطر الأوسط الذي هو (٣٠٧٦) فكان (٣٤٦٨)، فأثبتناه في السطر الأوسط بعد محو ما كان، ثم زدنا أول مراتب الأعلى (٤) على مراتب الأسفل (٩٨) فكان(١٠٢)، فأثبتناه في السطر الأسفل بعد محو ما كان.

- ثم حولنا السطر الأوسط مرتبة إلى اليمين، والسطر الأسفل مرتبتين إلى اليمين، ثم طلبنا عددًا وهو (٥) ووضعناه على أول المرتبة المنطقة وذلك أول سطر العدد، إذ لم يبق معنا غيرها ووضعنا مثل ذلك العدد في السطر الأسفل فكان على هذه الصورة:

	3			4			5
0	1	7	5	9	6	2	5
0	0	3	4	6	8	0	0
				1	0	2	5

- ثم ضربنا أول مراتب السطر الأعلى وهو(٥) في جميع مراتب الأسفل وهو (١٠٢٥) فكان حاصل الضرب (٥١٢٥)، زدناه على ما في السطر الأوسط وهو (٣٤٦٨٠٠) فكان المجموع هكذا (٣٥١٩٢٥) فأثبتنا ذلك في السطر الأوسط بعد محو ما كان قبله، ثم ضربنا هذا المثبت في أول مراتب الأعلى وهو خمسة فكان (١٧٥٩٦٢٥)، ثم قابلنا به ما بقي في سطر العدد فوجدناه قد فني ولم يبق منه بقية، فكان ما على السطر الأعلى هو كعب ذلك العدد، وذلك (٣٤٥) وهذا صورة ذلك:

3			4			5	
0	1	7	5	9	6	2	5
		3	5	1	9	2	5
				1	0	2	5

- أي أن:

$$\sqrt[3]{41063625} = 345$$

- يمكن شرح طريقة المؤلف رياضيًا وذلك كما يلي:

- يعتمد المؤلف على المتطابقة التالية:

$$N = (a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$$
$$+3(a+b)^2c + 3(a+b)C^2 + C^3 \Rightarrow$$
$$\sqrt[3]{N} = a+b+c$$

- يريد المؤلف إيجاد الجذر التكعيبي للعدد (41063625) أي:

$$\sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{41063625}$$

وبالتالي نريد تحديد المقادير التالية:

$$\sqrt[3]{41063625} = a+b+c$$

* يقسم العدد إلى مجموعات كل مجموعة تتضمن ثلاثة أرقام وذلك من اليمين إلى اليسار كما يلي: (625) (063) (041)، ثم يبحث عن عدد مكعبه إما أن يساوي (41) أو أقل، فيجده العدد (3) فيكون لدينا:

$a=3(10)^2 \quad =300$ ثم يحسب N_1 وذلك كما يلي:

$$N_1 = N - a^3 = 41063625 - (300)^3$$
$$= 41063625 - 27000000 = 14063625$$

* ثم يبحث عن (b) من الشكل $b=x\ (10)^1$ بحيث يكون:

$$N_2 = N_1 - \left(3a^2b + 3ab^2 + b^3\right)$$

فيجد المقدار b=4(10)=40 فيكون لدينا:

$$\begin{aligned} N_2 &= N_1 - (3a^2b + 3ab^2 + b^3) \\ &= 14063625 - \left[3(300)^2(40) + 3(300)(40)^2 + (40)^3\right] \\ &= 14063625 - (10800000 + 1440000 + 64000) \\ N_2 &= 14063625 - 12304000 = 1759625 \end{aligned}$$

- ثم يبحث عن (C) من الشكل $C=Y(10)^0$ فيكون لدينا:

$$\begin{aligned} N_3 &= N_2 - \left\{3\left[(a+b)^2C + (a+b)C^2\right] + C^3\right\} \\ &= 1759625 - \left\{3[(300+40)^2 5 + (300+40)5^2] + 5^3\right\} \\ &= 1759625 - \{3[(340)^2 5 + (340)5^2] + 5^3\} \\ &= 1759625 - \{3(578000 + 8500) + 125\} \\ &= 1759625 - [3(586500) + 125] \\ &= 1759625 - (1759500 + 125) \\ &= 1759625 - 1759625 \\ N_3 &= 0 \end{aligned}$$

أي لا يوجد للمجذور باقٍ.

$$\sqrt[3]{N} = a + b + c \Rightarrow \sqrt[3]{41063625} = 300 + 40 + 5 = 345$$

ثم يقدم المؤلف مثالاً آخر:

« **فإن قيل**: استخرج لنا كعب هذا العدد وهو ١٤٨١٥٤٤» (صفحة ١٣٤).

يمكن شرح طريقة المؤلف رياضيًا وذلك كما يلي:

* يريد المؤلف إيجاد الجذر التكعيبي للعدد (1481544) أي:

$$\sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{1481544}$$

وبالتالي نريد تحديد المقادير التالية: $\sqrt[3]{1481544} = a + b + c$

* يقسم العدد إلى مجموعات كل مجموعة تتضمن ثلاثة أرقام وذلك من اليمين إلى اليسار كما يلي: (544) (481) (001)، ثم يبحث عن عدد مكعبه إما أن يساوي (1) أو أقل، فيجده العدد(1) فيكون لدينا $a=1(10)^2=100$ ثم يحسب N_1 وذلك كما يلي:

$$N_1 = N - a^3 = 1481544 - (100)^3 = 1481544 - 1000000 = 481544$$

- ثم يبحث عن (b) من الشكل $b = x(10)^1$ ويحسب العلاقة التالية:

$$N_2=N_1-(3a^2b+3ab^2+b^3)$$

فيجد المقدار: $b=1(10)=10$ فيكون لدينا:

$$\begin{aligned} N_2 &= N_1 - (3a^2b + 3ab^2 + b^3) \\ &= 481544 - \left[3(100)^2(10) + 3(100)(10)^2+(10)^3\right] \\ &= 481544 - (300000 + 30000 + 1000) = 481544 - 331000 \\ N_2 &= 150544 \end{aligned}$$

ثم يبحث عن (C) من الشكل $C=y(10)^0$ فيكون لدينا:

$$\begin{aligned} N_3 &= N_2 - \left\{3\left[(a+b)^2C + (a+b)C^2\right] + C^3\right\} \\ &= 150544 - \left\{3\left[(100+10)^2 4 + (100+10)4^2\right] + 4^3\right\} \\ &= 150544 - [3(48400 + 1760) + 64] \\ &= 150544 - [3(50160) + 64] \\ &= 150544 - (150480 + 64) \\ &= 150544 - 150544 \\ N_3 &= 0 \end{aligned}$$

أي لا يوجد للمجذور باقٍ.

$$\sqrt[3]{N} = a + b + c \Rightarrow \sqrt[3]{1481544} = 100 + 10 + 4 = 114$$

- كيفية استخراج كعب العدد الأصم مع التقريب: (صفحة ١٣٥).

يبدأ المؤلف موضوعه بالمقدمة التالية: « إنَّ كل عدد ليس له كعب حقيقي فهو

واقع بين مكعبين حقيقيين، أحدهما أعظم منه والآخر أصغر منه، والفضل بينهما دائمًا واحد ».

أي أن: لدينا (N) عدد ليس له كعب حقيقي، فهو واقع بين مكعبين حقيقيين أي:

$$\sqrt[3]{(A+1)^3} > \sqrt[3]{N} > \sqrt[3]{A^3}$$

إذًا فنحن أمام حالتين:

١ - الحالة الأولى:

$$\Leftarrow \sqrt[3]{N} > \sqrt[3]{A^3}$$

$$\sqrt[3]{N} = A + \left\{ \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3A^3}{3A+1}\right)\right]^2 + \frac{N-A^3}{3A+1}} - \frac{1}{2}\left(\frac{3A^2}{3A+1}\right) \right\}$$

$$\sqrt[3]{N} < \left[\sqrt[3]{B^3} = \sqrt[3]{(A+1)^3}\right]$$

$$\sqrt[3]{N} = B - \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{3B^2}{2B-1}\right) - \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3B^2}{2B-1}\right)\right]^2 - \left[\frac{B^3-N}{3B-1}\right]} \right\}$$

٢ - الحالة الثانية:

- **مثال:« أردنا استخراج كعب الخمسين »** (صفحة ١٤٨).

يقع كعب (50) بين كعبين، الأصغر (3) والأكبر(4).

١ - **الحالة الأولى:** الكعب الأصغر (3) أي (A=3) والمكعب (N=50)

$$\sqrt[3]{N} = A + \left\{ \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3A^2}{3A+1}\right)\right]^2 + \frac{N-A^3}{3A+1}} - \frac{1}{2}\left(\frac{3A^2}{3A+1}\right) \right\}$$

$$\sqrt[3]{50} = 3 + \left\{ \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3\times 3^2}{3\times 3+1}\right)\right]^2 + \frac{50-3^3}{3\times 3+1}} - \frac{1}{2}\left(\frac{3\times 3^2}{3\times 3+1}\right) \right\}$$

$$= 3\left\{\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{27}{10}\right)\right]^2+\frac{23}{10}}-\frac{1}{2}\left(\frac{27}{10}\right)\right\}$$

$$= 3\left\{\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(2\frac{7}{10}\right)\right]^2+\left(2\frac{3}{10}\right)}-\frac{1}{2}\left(2\frac{7}{10}\right)\right\}$$

$$\sqrt[3]{50} = 3 + \left[\sqrt{\left(1+\frac{3}{10}+\frac{1}{2}.\frac{1}{10}\right)^2+\left(2\frac{3}{10}\right)}-\frac{1}{2}\left(2\frac{7}{10}\right)\right]$$

$$= 3 + \left[\sqrt{1+\frac{8}{10}+\frac{2}{10}.\frac{1}{10}+\frac{1}{4}.\frac{1}{10}.\frac{1}{10}+2\frac{3}{10}}-\left(1+\frac{3}{10}+\right)\right.$$

$$= 3 + \left[\sqrt{4+\frac{1}{10}+\frac{2}{10}.\frac{1}{10}+\frac{1}{4}.\frac{1}{10}.\frac{1}{10}}-\left(1+\frac{3}{10}+\frac{1}{2}.\frac{1}{10}\right)\right.$$

$$= 3 + \left[2+\frac{2}{8}.\frac{1}{10}+\frac{1}{2}.\frac{1}{8}.\frac{1}{10}-\left(1+\frac{3}{10}+\frac{1}{2}.\frac{1}{10}\right)\right]$$

لإيجاد الجذر التربيعي بالتقريب للبسط – على اعتبار أن المقام له جذر صحيح

– استخدم المؤلف العلاقة التالية:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2+r} \approx a + \frac{r+1}{2a}$$

$$\boxed{\sqrt[3]{50} \approx 3+\frac{6}{10}+\frac{6}{8}.\frac{1}{10}+\frac{1}{2}.\frac{1}{8}.\frac{1}{10}}$$

– ولامتحان النتيجة يقوم المؤلف بتكعيب الجواب أي:

$$.\left(3+\frac{6}{10}+\frac{6}{8}.\frac{1}{10}+\frac{1}{2}.\frac{1}{8}.\frac{1}{10}\right)^3$$

$$= 49+\frac{8}{10}+\frac{8}{10}.\frac{6}{10}.\frac{1}{10}.\frac{1}{10}+\frac{6}{8}.\frac{1}{10}.\frac{1}{10}.\frac{1}{10}$$

$$+\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}+\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}$$
$$+\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}$$

وبعد حساب الجواب بالطريقة الحديثة نجد:

$$\left(3+\frac{6}{10}+\frac{6}{8}\cdot\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{10}\right)^3=49\frac{3632469}{4096000}$$

٢ - **الحالة الثانية**: أخذنا الكعب الأكبر (٤) أي (B=٤) والمكعب((N=٥٠

(مراحل الحل غير مذكورة في المخطوطة).

$$\sqrt[3]{N}=B-\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{3B^2}{3B^1}\right]-\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3B^2}{3B^1-1}\right)\right]^2-\frac{B^2-N}{(3B)-1}}\right\}$$

$$\sqrt[3]{50}=4-\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{3\times4^2}{(3\times4)-1}\right]-\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3\times4^2}{3\times4-1}\right)\right]^2-\frac{4^3-50}{(3\times4)-1}}\right\}$$

$$\sqrt[3]{50}=4-\left\{\frac{1}{2}\left[\frac{48}{11}\right]-\sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{48}{11}\right)\right]^2-\frac{14}{11}}\right\}$$

$$\sqrt[3]{50}=4-\left\{\frac{24}{11}-\sqrt{\left[\left(\frac{24}{11}\right)\right]^2-\frac{14}{11}}\right\}$$

$$=4-\left[\left(2+\frac{2}{11}\right)-\sqrt{\left(2+\frac{2}{11}\right)^2-\frac{14}{11}}\right]$$

$$=4-\left[\left(2+\frac{2}{11}\right)-\sqrt{4+\frac{8}{11}+\frac{4}{11}\cdot\frac{1}{11}-\left(1+\frac{3}{11}\right)}\right]$$

$$=4-\left[\left(2+\frac{2}{11}\right)-\sqrt{3+\frac{8}{11}+\frac{4}{11}\cdot\frac{1}{11}}\right]$$

$$= 1 + \frac{9}{11} + \sqrt{3 + \frac{5}{11} + \frac{4}{11} \cdot \frac{1}{11}}$$

$$\sqrt[3]{50} \approx 3 + \frac{7}{11} + \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{11} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{11}$$

لحساب الجذر التربيعي بالتقريب للبسط– على اعتبار المقام له جذر صحيح– استخدم المؤلف العلاقة التالية:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r+1}{2a+2}$$

– ولامتحان النتيجة يقوم المؤلف بتكعيب الجواب أي:

$$\left(3 + \frac{7}{11} + \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{11} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{11}\right)^3 = 50 + \frac{10}{11} \cdot \frac{1}{11} + \frac{4}{11} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{11}$$

$$+ \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{11} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{11} + \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{11}$$

$$+ \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{11} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{11}$$

$$= 50 + \frac{8499527}{98611128}$$

– وبعد حساب الجواب بالطريقة الحديثة نجد:

$$\left(3 + \frac{7}{11} + \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{11} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{11}\right)^3$$

$$= \left(\frac{1703}{462}\right)^3 = \frac{4939055927}{98611128} = 50 + \frac{8499527}{98611128}$$

– وهو مطابق تمامًا للجواب الوارد في المخطوطة.

ويقول المؤلف: « وإن أردت زيادة التدقيق، فخذ نصف مجموع الكعبين الأصغر والأعظم يكن ذلك كعب الخمسين بأقرب التقريب ».

– لدينا الكعب الأصغر: $1)\sqrt[3]{50} \approx 3 + \frac{6}{10} + \frac{6}{8}\cdot\frac{1}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{10}$

– ولدينا الكعب الأعظم: $2)\sqrt[3]{50} \approx 3 + \frac{7}{11} + \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{11} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{11}$

– وبحسب المؤلف نأخذ الوسط الحسابي للكعبين الأصغر والأعظم فيكون لدينا:

$$\sqrt[3]{50} \approx \left[\left(3 + \frac{6}{10} + \frac{6}{8}\cdot\frac{1}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{10}\right) + \left(3 + \frac{7}{11} + \frac{3}{7}\cdot\frac{1}{11} + \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{11}\right)\right]/2$$

$$\approx \left[\left(3 + \frac{109}{160}\right) + \left(3 + \frac{317}{462}\right)\right]/2 = \left(6 + \frac{50358 + 50720}{160 \times 462}\right)/2 \approx 3 + \frac{50539}{73920}$$

– الوسط الحسابي للجذر بالطريقتين:

$$\sqrt[3]{50} \approx 3 + \frac{7}{11} + \frac{5}{10}\cdot\frac{1}{11} + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{11} + \frac{4}{7}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{11} +$$

$$\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{11} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{11}$$

– ويسمي المؤلف النتيجة السابقة « بكعب الخمسين بأقرب التقريب ».

– ويختبر المؤلف النتيجة السابقة ويعطي النتيجة التالية بطريقته:

$$\left(3 + \frac{7\;\;5\;\;\;1\;\;4\;\;3\;1}{11\;10\;\;8\;\;7\;\;6\;2}\right)^3 = 49 + \frac{10\;10\;\;0\;\;\;0\;5\;\;2\;0\;4\;2\;3\;3\;3\;1}{11\;\;11\;\;11\;8\;8\;8\;8\;7\;7\;7\;6\;6\;6}$$

– وبعد حساب طرفي المساواة السابقة نجدها غير محققة، فإن النتيجة التي حصلنا عليها هي:

– الطرف الأيسر هو:

$$\left(3+\frac{7\ \ 5\ \ 1\ \ 4\ \ 3\ \ 1}{11\ \ 10\ \ 8\ \ 7\ \ 6\ \ 2}\right)^3=\left(\frac{272\ \ 299}{73\ \ 920}\right)^3$$

$$=\frac{20\ \ 190\ \ 084\ \ 625\ \ 946\ \ 899}{403\ \ 911\ \ 180\ \ 288\ \ 000}$$

$$\boxed{\left(3+\frac{7\ \ 5\ \ 1\ \ 4\ \ 3\ \ 1}{11\ \ 10\ \ 8\ \ 7\ \ 6\ \ 2}\right)^3=49+\frac{398\ \ 436\ \ 791\ \ 834\ \ 899}{403\ \ 911\ \ 180\ \ 288\ \ 000}} \quad (1)$$

– الطرف الأيمن هو:

$$\left(49+\frac{10\ \ 10\ \ 0\ \ 0\ \ 5\ \ 2\ \ 0\ \ 4\ \ 2\ \ 3\ \ 3\ \ 3\ \ 1}{11\ \ 11\ \ 11\ \ 8\ \ 8\ \ 8\ \ 8\ \ 7\ \ 7\ \ 7\ \ 6\ \ 6\ \ 6}\right)=$$

$$49+\frac{400\ \ 598\ \ 011\ \ 062\ \ 001}{403\ \ 911\ \ 180\ \ 288\ \ 000} \quad (2)$$

– ولكن نجد النتيجة في (1) قريبة جدًا من النتيجة في (2).

– **طريقة أخرى تعرف بالاستقراء:** (صفحة ١٣٨).

« وهو أن تحل العدد المفروض إلى أعداده الأوائل، ثم تتوخى ثلاثة أعداد بحيث يتركب منها مكعبٌ يساوي المفروض فيكون كعبه أحدها، وإلا، فلا كعب له صحيح ».

أي: (بحيث $N=A^3.B^3.C^3$) $\qquad \sqrt[3]{N}=\sqrt[3]{A^3.B^3.C^3}=A.B.C$

في حالة عدم إمكانية تحليل العدد إلى أعداد مكعبة، فليس للعدد جذر تكعيبي صحيح.

وأما أخذ كعوب الكسور: (صفحة ١٣٨).

تنقسم إلى أربعة أقسام:

- **الأول**: البسط والإمام مكعب كالثمن: مثال: $\frac{1}{8}$
- **الثاني**: إن البسط مكعب والإمام غير مكعب: مثال:

$$\left(\frac{1}{7}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{7}\right)$$

- **الثالث**: أن يكون الإمام مكعب والبسط غير مكعب: مثال:

$$\left(\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{9}\right)$$

- **الرابع**: أن يكون كل منهما غير مكعب.
- **أما استخراج كعب القسم الأول**: (صفحة ١٣٨).
- **مثاله**: « نريد كعب تسعَين وثلثي تسع »
- (البسط والإمام مكعبان)

$$* \sqrt[3]{\frac{2}{9}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{9}} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$$

أما استخراج كعب القسم الثاني: (صفحة ١٣٩).

مثاله: « ثمانية أتساع »

$$\sqrt[3]{\frac{8}{9}} = \sqrt[3]{\frac{8\times 3}{9\times 3}} = \sqrt[3]{\frac{24}{27}} \approx \frac{2+\frac{7}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}}{3} =$$

$$\frac{9}{10}+\frac{4}{8}\cdot\frac{1}{10}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{10}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{10}$$

لقد كان حساب المؤلف قريبًا من النتيجة الصحيحة، فكانت نتائجه كما يلي:

$$\sqrt[3]{24} \approx 2+\frac{7}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1151}{400}$$

$$= 2,8775 \Rightarrow \boxed{(2.8775)}^3 = \boxed{23,855717}$$

– وباستخدام الآلة الحاسبة نجد النتائج كما يلي:

$$\sqrt[3]{24} \approx \boxed{2,8844991} \Rightarrow (2,8844991)^3 = \boxed{23,999998}$$

« **وأما القسم الثالث**: فهو أن يكون البسط غير مكعب والإمام مكعب، مثل ثلاثة أثمان وخمسة أثمان الثمن». (صفحة ١٤٠).

$$\sqrt[3]{\frac{3}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{8}} = \sqrt[3]{\frac{29}{64}} = \frac{\sqrt[3]{29}}{4} \approx \frac{7}{10} + \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{10} = \frac{253}{320} \Rightarrow$$

ومنه نستنتج أنَّ نتيجة المؤلف للجذر التكعيبي للمقدار (29) كانت كما يلي:

$$\sqrt[3]{29} \approx \frac{253}{320} \times 4 = \frac{253}{80} = \boxed{3,1625} \Rightarrow (3,1625)^3 = \boxed{31,629446}$$

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد النتائج كما يلي:

$$\sqrt[3]{29} \approx \boxed{3,0723168} \Rightarrow (3,0723168)^3 = \boxed{28,999999}$$

لم يكن المؤلف موفقًا في حساب الجذر السابق.

- « **وأما استخراج كعب القسم الرابع**: وهو ألا يكون لبسط الكسر ولا لإمامه كعب حقيقي كسبعة أتساع».(صفحة ١٤٠).

$$\sqrt[3]{7/9} = \sqrt[3]{\frac{7 \times 3}{9 \times 3}} = \frac{\sqrt[3]{21}}{3} \approx \frac{7}{8} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{8} = \frac{265}{288} \Rightarrow$$

ومنه نستنتج أنَّ نتيجة المؤلف للجذر التكعيبي للمقدار (21) كانت كما يلي:

$$\sqrt[3]{21} \approx \tfrac{265}{288} \times \tfrac{265}{96} \approx \boxed{2,7604166} \Rightarrow (2,7604166)^3 = \boxed{21,034097}$$

وباستخدام الآلة الحاسبة نجد النتائج كما يلي:

$$\sqrt[3]{21} \approx \boxed{2,7589242} \Rightarrow (2,7589242)^3 = \boxed{21}$$

وكانت نتيجة المؤلف قريبة جدًا من النتيجة في الآلة الحاسبة.

« تنبيه: متى كان الكسر أو الكسور غير منطقة، فاضرب بسطها في مكعب يكن ضلعه إمامًا لتلك الكسور، ثم خذ كعب الخارج بالتقريب، وإن شئت فاضرب البسط في كعب الإمام، واقسم كعب الخارج على ضلع ذلك الكعب ». (صفحة ١٤٠).

$$\sqrt[3]{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt[3]{\frac{A}{B}(B^3)}}{B}$$

« **مثاله:** أردنا كعب أربعة أتساع » (صفحة ١٥٤).

- بحسب المؤلف:

$$\sqrt[3]{\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt[3]{\frac{4}{9}(9)^3}}{9}=\frac{\sqrt[3]{\frac{4}{9}(729)}}{9}=\frac{\sqrt[3]{324}}{9}\approx$$

$$\frac{6+\frac{8}{10}+\frac{6}{10}\cdot\frac{1}{10}+\frac{6}{8}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}}{9}=\frac{\frac{21979}{3200}}{9}$$

$$\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\approx\frac{6}{9}+\frac{6}{8}\cdot\frac{1}{9}+\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{9}$$

$$\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\approx\frac{21979}{3200\times 9}=\frac{21979}{28800}\Rightarrow\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\approx 0,7631597$$

- بالآلة الحاسبة:

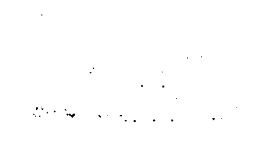
$$\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\approx 0,7631428$$

نجد أن نتيجة المؤلف قريبة جدًا من نتيجة الآلة الحاسبة.

❁❁❁



الدراسة التاريخية



الدراسة التاريخية

لمخطوطة

إرشاد العجم لأعمال الجذور الصم

لمحمد بن أبي الفتح محمد بن الشرقي أبي الروح عيسى بن أحمد الصوفي الشافعي المصري

عالج الرياضيون العمليات الرياضية على الأعداد الصم ضمن مؤلفاتهم وبشكل جزئي، حيث نجد بعض الطرق التقريبية البسيطة لإيجاد الجذر التربيعي للأعداد الصم في الحضارة البابلية، وكذلك في الحضارة اليونانية.

اهتم رياضيو الحضارة العربية/ الإسلامية بموضوع الأعداد الصم، و درسوا القوانين الخاصة بها، وطوروها وابتكروا قوانين جديدة تعطي نتائج أدق، وخصصوا فصلاً من كتبهم لمعالجة الموضوع.

يهدف الكتاب إلى تقديم مخطوطة نادرة ووحيدة في مكتبات العالم، وهي مخطوطة إرشاد العجم لأعمال الجذور الصم لمحمد بن أبي الفتح محمد بن الشرقي أبي الروح عيسى بن أحمد الصوفي الشافعي المصري (كان حيًا سنة ٩٤٣ هـ/١٥٣٦م).

والمخطوطة مخصصة بشكل كامل لمعالجة وشرح العمليات الرياضية المطبقة على الأعداد الصم وبالتفصيل، مما يعطي المخطوطة طابعها الخاص المميز من باقي الأعمال الرياضية التي خصصت أحد فصولها فقط لبعض العمليات الرياضية على الأعداد الصم.

قسم المؤلف عمله إلى مقدمة وفنين اثنين وخاتمة، حيث درس في **الفن الأول** أعمال جذور الأعداد الصم المفردة غير المركبة من تضعيفها وتبعيضها وضربها وجمعها وطرحها وقسمتها ونسبتها، وخصص **الفن الثاني** لأعمال المركبات من حيث إيجادها وضربها وقسمتها وجذورها واختبارها، وتناولت **الخاتمة** أعمال الكعوب من استخراج مكعباتها وذوات أسمائها وفي ضربها وقسمتها وجمعها وطرحها، واستخراج الكعوب من مكعباتها، وأخذ كعوب متصلاتها ومنفصلاتها منطقها وأصمها.

ركز محمد بن أبي الفتح على كافة العمليات الحسابية المطبقة على الجذور الصم، ولم يهتم بإيجاد قيم الجذور التربيعية للأعداد الصم بشكل تقريبي، بل قدم لنا قواعد دقيقة جدًا لإيجاد قيم الجذور التكعيبية للأعداد الصم بشكل تقريبي.

تتكون الدراسة التاريخية من النقاط التالية:

١ - تعريف جذر العدد الأصم في الحضارة العربية.

٢ - الجذر التربيعي للأعداد الصم عند البابليين والإغريق.

٣ - دراسة الجذور الصم في المؤلفات الرياضية العربية.

١ - تعريف جذر العدد الأصم في الحضارة العربية

عرّف كمال الدين الفارسي (من القرن الثالث عشر الميلادي) بشكل واضح ومفصل جذر العدد الأصم في كتابه **أساس القواعد في أصول الفوائد** فقال(١):

« **العدد قسمان:**

مجذور وهو الذي يتولد من ضرب عدد في مثله، مثل الأربعة والتسعة والمولد يسمى جذرًا والمجذور يسمى مُنْطَقًا.

وغير المجذور مثل الصحاح التي بينهما في الترتيب الطبيعي كالخمسة والستة وغيرهما ويسمى أصم.

واعلم أن الخمسة جذرها أكثر من اثنين وأقل من ثلاثة. ثم لايمكن استخراج عددٍ إذا ضرب في نفسه حصل خمسةٌ تحقيقًا، ولو أن محاسبي العالم أفنوا مُدَدَ أعمارهم في طلب ذلك بأي طريق سلكوا نحوه إلا أنه تزداد الكسور المضافة إلى الصحيح من الجذر أنواعًا، وبها يزداد الجوابُ قربًا من الصواب غير منتهٍ إليه أبدًا.

قال بعضهم: لاشك في أن له جذرًا فإنه بالخطوط يمكن استخراجه على ما تبين من أشكال أقليدس فعَددِيَّته مجهولةٌ للبشر فهو من العلوم التي استأثر الله بها، ولذلك كان بعض الحكماء يواظب في أوراده على هذه الكلمة: سُبحان من يعلم جذر العدد الأصم، سبحان من يعلم نسبة القطر إلى الدائرة. وكذلك الكلام في الكعب، وهكذا ظنّ بعضهم. إلا أن فيه نظرًا فإنه قد تبين بالبرهان العددي أنه لايمكن أن يكون للصحاح التي بين مجذورين متواليين جذرٌ عدديٌّ البتة كما سنبينه آخر مباحث الجذور إن شاء الله تعالى».

---

(١) الفارسي، كمال الدين، **أساس القواعد في أصول الفوائد**، تحقيق مصطفى موالدي، معهد المخطوطات العربية، القاهرة، ١٩٩٤م، الصفحة ٦٣.

يعدد ابن خوام البغدادي تسميات الفرد فيقول[١]: « والفرد إن عدّه عددٌ سميّ مركبًا كالتسعة التي تعدّها الثلاثة وإلا سميّ أصم وأول كأحد عشر وهو ظاهر».

يعلّق كمال الدين الفارسي على ما ذُكر ويميّز بين العدد الأصم وفرد الفرد والعموم فيقول [٢]: «الفرد الذي سماه مركبًا هو الذي سمّاه أقليدس فرد الفرد، وأما الأصم فعرّفه بأنه الذي لايصحّ له كسر من الكسور التسعة، وهي التي من النصف إلى العشر، والأول بما لايعده إلا الواحد فيكون بين الأصم وكلٍّ من فرد

الفرد والأول عموم من وجه لاجتماع الأصم وفرد الفرد في مثل ١٢١ وافتراقهما في مثل ١١ و ١٥، ولاجتماع الأصم والأول في مثل ١١، وافتراقهما في مثل ١٢١ و ٣، وبين الأول وفرد الفرد تباينٌ كلي واستعمالهما في هذا الكتاب على هذا الاصطلاح فلهذا ذكرناه».

أما الكاشي فيعرّف الأصم كما يلي[٢] : و«اعلم أن كلّ مضلّع يوجد له ضلعٌ يتولد ذلك الضلع منه بالحقيقة، يقال إنّه منطق وما لايوجد له ضلع كذلك يقال إنه أصم».

ويحدّد الدكتور سعيدان مفهوم العدد الأصم في الحضارة العربية/ الإسلامية فيقول[٣]: «وفي الاصطلاح العربي القديم، كلُّ ما لايمكن أن يعبر عن قيمته بالدقة يسمّى أصمّ، بالمقارنة بالمقادير المنطقة التي يمكن التعبير عنها».

---

(١) **الفارسي، أساس القواعد.....**، المصدر السابق، الصفحتان ٧٣-٧٤.

(٢) **الكاشي**، جمشيد، **مفتاح الحساب**، تحقيق نادر النابلسي، مطبوعات وزارة التعليم العالي، دمشق، ١٩٧٧م، الصفحة ٧١.

(٣) **البوزجاني**، أبو الوفاء، **تاريخ علم الحساب العربي - الجزء الأول (حساب اليد) - تحقيق لكتاب المنازل السبع لأبي الوفاء البوزجاني**، مع مقدمة ودراسة بالمقارنة بكتاب الكافي في الحساب لأبي بكر الكرجي الحاسب، بقلم أحمد سليم سعيدان، عمان بالأردن، ١٩٧١م، الصفحة ٤١.

وقد اعتمدنا – في دراستنا – المفهوم السائد في الحضارة العربية / الإسلامية للعدد الأصم وجذوره الذي أشار إليه آنفًا الدكتور سعيدان.

٢ - الجذر التربيعي للأعداد الصم عند البابليين واليونانيين

يشير مؤرخو الرياضيات إلى معرفة البابليين ومن بعدهم اليونانيين لطريقة إيجاد الجذر التربيعي للأعداد الصم بالتقريب.

فقد أشار الباحثان الروسيان يوشكوفيتش (youschkevitch) وروزنفيلد (Rosenfeld) إلى أن القيمة التقريبية للجذر التربيعي للأعداد الصم – بالزيادة – أي:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a}$$

وردت في أعمال رياضيي بابل، وكما نراها لدى هيرون الاسكندري (Heron d'Alexandrie) من القرن الثاني الميلادي، وكذا استخدمه يوحنا الاشبيلي (في القرن الحادي عشر) في ترجمته لرسالة الخوارزمي في الحساب بتصرف.

ثم يشير الباحثان إلى ما يلي[١]: (وهناك رأي بأن كلا من التقريبين – التقريب بالنقص والتقريب بالزيادة – قد وردا فيما كتبه الرياضي الصيني ليوخريا أثناء شرحه «للرياضة في تسعة أجزاء»):

ثم يؤكد أكثر من مؤرخ على ما أشار إليه الباحثان الروسيان إما بالشكل نفسه أو مع بعض التعديلات والتفصيلات، مثل سعيدان[٢]، وبولحية[٣](Boulahia)،

(١) يوشكوفيتش، إنجازات العلماء الصينيين في الرياضة" من تاريخ العلوم والتكنيك الصيني¢، (باللغة الروسية)، موسكو، ١٩٥٥، الصفحة ١٥٠.
المصدر: الكاشي، مفتاح الحساب....، المرجع السابق، هامش الصفحة ٧٥.

(٢) البوزجاني، تاريخ علم الحساب العربي - الجزء الأول (حساب اليد) - تحقيق لكتاب المنازل السبع...، المرجع السابق، الصفحة ٣٤.

(3) BOULAHIA, N!jib, Algorithmes et Approximations, Tunis, 1987, PP.24-25.

ومارتزلوف[1](Martzloff) وغيرهم؛ وقد خصص أقليدس المقالة العاشرة من كتابه **الأصول** لمعالجة الأعداد المنطقة والأعداد الصم.

٣ - دراسة الجذور الصم في المؤلفات الرياضية العربية

بهدف معرفة تطور دراسة الجذور الصم في المؤلفات الرياضية المشرقية والمغربية قمنا بدراسة مجموعة من الكتب الرياضية واستعراض نتائجها بتسلسل تاريخي كما يلي:

١ – كتاب الحساب الهندي (مفقود بالعربية) المنسوب لمحمد بن موسى الخوارزمي (توفي ٢٣٢هـ/٨٤٦م).

٢ – كتاب الفصول في الحساب الهندي لأبي الحسن أحمد بن إبراهيم الأقليدسي (ألف الكتاب سنة ٣٤١هـ/٢ – ٩٥٣م).

٣ – كتاب المنازل السبع لأبي الوفاء البوزجاني (٣٢٨هـ/٩٤٠م – ٣٨٨هـ/٩٩٨م).

٤ – الكافي في الحساب لأبي بكر محمد بن الحسن الكرجي (توفي سنة ٤١٩هـ/١٠٢٩م).

٥ – كتاب التكملة في الحساب لعبد القاهر بن طاهر البغدادي (توفي سنة ٤٢٩هـ/ ١٠٣٧م).

٦ – كتاب تلقيح الأفكار في العمل برشوم الغبار لابن الياسمين (توفي سنة ٦٠١هـ/ ١٢٠٤م).

٧ – كتاب فقه الحساب لأبي جعفر أحمد بن إبراهيم بن منعم العبدري (توفي سنة ٦٢٦هـ/ ١٢٢٨م).

---

(1) MARTZLOFF,J. - C, Histoire des Math!matiques Chinoises, Masson, Paris, 1988,P.216.

٨ – كتاب جوامع الحساب بالتخت والتراب لنصير الدين الطوسي (٥٩٧-٦٧٢هـ/ ١٢٠١ – ١٢٧٤م).

٩ – أساس القواعد في أصول الفوائد لكمال الدين الفارسي (توفي سنة ٧١٨هـ/ ١٣١٩م).

١٠– كتاب تلخيص أعمال الحساب لابن البناء المراكشي (٦٥٤هـ/ ١٢٥٦م – ٧٢١هـ/ ١٣٢١م).

١١– كتاب رفع الحجاب عن وجوه أعمال الحساب لابن البناء المراكشي (توفي سنة ٧٢١هـ/ ١٣٢١م).

١٢– مراسم الانتساب في معالم الحساب ليعيش بن إبراهيم الأموي (توفي سنة ٧٧٤هـ/ ١٣٥٣م).

١٣– كتاب مفتاح الحساب لجمشيد الكاشي (توفي سنة ٨٣٣-٨٣٤هـ/ ١٤٢٩م).

١٤– كتاب تبصرة المبتدي بالقلم الهندي لعلي بن محمد بن علي القرشي الشهير بالقلصادي (١٤١٢– ١٤٨٦م).

١٥– كتاب إرشاد الطلاب إلى وسيلة الحساب لسبط المارديني (توفي سنة ٩١٢هـ/ ١٥٠٦م؟).

١٦– كتاب بغية الطلاب في شرح منية الحساب لابن غازي المكناسي الفاسي (توفي سنة ٩١٩هـ/ ١٥١٣م).

١٧– إرشاد العجم لأعمال الجذور الصم لمحمد بن أبي الفتح محمد بن الشرقي أبي الروح عيسى بن أحمد الصوفي (كان حيًا ٩٤٣هـ/ ١٥٣٦م).

١٨– رياضيات بهاء الدين العاملي (٩٥٣-١٠٣١هـ/ ١٥٤٧– ١٦٢٢م).

نتيجة الدراسة

١ - كتاب الحساب الهندي (مفقود بالعربية) المنسوب لمحمد بن موسى الخوارزمي(توفي ٢٣٢هـ- ٨٤٦م):

يذكر عبد القاهر بن طاهر البغدادي في كتابه **التكملة في الحساب** أن محمد ابن موسى الخوارزمي حَسَبَ الجذر التربيعي لمقدار أصم بالتقريب فيقول[١]: «الرسم في إخراج جذر الأصم بالتقريب، كالرسم في إخراج جذر ماله جذر ينطق به بالتحقيق، غير أنه يبقى في الأصم كسور، جزءًا أو أجزاء، بعد إخراج ما يخرج بالجذر من الصحاح. وقد اختلف الحسَّاب في نسبة تلك الأجزاء الباقية: فنسبه **محمد بن موسى الخوارزمي** رحمه الله إلى ضعف الجذر الخارج من الصحاح، ونسبة أكثر الحسَّاب إلى ضعف الجذر الخارج مزيدًا عليه واحد. وهذا القول أقرب إلى الصواب».

- قاعدة الجذر التربيعي للأعداد الصم بحسب الخوارزمي:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a}$$

حيث: N = عدد أصم.

- قاعدة الجذر التربيعي للأعداد الصم بحسب أكثر الحسَّاب في عهد ابن طاهر البغدادي:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a + 1}$$

حيث: N = عدد أصم.

يعلق محقق كتاب ابن طاهر البغدادي على النص السابق لابن طاهر البغدادي

(١) **ابن طاهر البغدادي**، عبد القاهر، **التكملة في الحساب**، (مع رسالة للمؤلف في المساحة)، تحقيق أحمد سليم سعيدان، معهد المخطوطات العربية، الكويت، ١٩٨٥م، الصفحة ٧٦.

كما يلي[١]: «كتاب الحساب الهندي المنسوب للخوارزمي مفقود بالعربية، ولكن هناك بضع مخطوطات لاتينية هي ترجمات لأجزاء من الكتاب أو مقتبسات منه. وقد نشر فوجل إحداها. ومنها نجد أن الكتاب لايخرج عن كونه عرضًا للحساب بالأرقام الهندية على التخت، مع المحو.

وفي إحدى هذه المخطوطات نجد الخوارزمي يعطي $\sqrt{26}$ ، $\sqrt{2}$

(انظر ١٩٦٣ Algorismus, by Kurt Vogel, Arlen)».

٢ - كتاب «الفصول في الحساب الهندي» لأبي الحسن أحمد بن إبراهيم الأقليدسي[٢] ألف الكتاب سنة ٣٤١هـ (٣-٩٥٢م)]

تعددت طرق الأقليدسي لحساب الجذور للأعداد الصم بالتقريب:

– ففي الباب الثاني عشر (في استخراج جذر الأعداد المفتوح منها والأصم) من الفصل الأول، يحسب الأقليدسي الجذر التربيعي للعدد الأصم وذلك بأخذ جذر أكبر مربع كامل صحيح فيه، ويهمل الباقي، ويكرر ذلك في أكثر من موضع، فعلى سبيل المثال (الصفحة ١١٠):

$$\sqrt{5085} = \sqrt{5041 + 44} = \sqrt{(71)^2 + 44} \approx 71$$

١ – الجذر التربيعي للأعداد الصم:

في الباب الثامن عشر (في تجذير الصم) من الفصل الثاني، يقدم الأقليدسي عدة قواعد لحساب الجذر التربيعي لعدد أصم بالتقريب وهي:

١ - القاعدة الأولى (الصفحة ٢١٨):

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a}$$

---

(١) ابن طاهر البغدادي، **التكملة في الحساب....**، المصدر السابق، الصفحة ٣٠٢.

(٢) **الأقليدسي**، أبو الحسن أحمد بن إبراهيم، **الفصول في الحساب الهندي**، تحقيق أحمد سعيدان، الطبعة الثانية، منشورات معهد التراث العلمي العربي بجامعة حلب، ١٩٨٤م.

حيث: N = عدد أصم .

ويقول الأقليدسي إن النتيجة في القاعدة السابقة تزيد عن الجذر الحقيقي، ومن ثم يعطي القاعدة الثانية التالية:

٢ - القاعدة الثانية (الصفحة ٢١٨):

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2\,a + 1}$$

حيث: N = عدد أصم .

ويقول: إن النتيجة بالقاعدة الثانية تنقص عن الجذر الحقيقي، ولذلك يأخذ الأقليدسي الوسط الحسابي للمخرجين (المقامين)، وتصبح القاعدة كما يلي:

٣ - القاعدة الثالثة (الصفحة ٢١٨):

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2\,a + \frac{1}{2}}$$

حيث: N = عدد أصم.

ولكن الأقليدسي لايطبق القاعدة الأخيرة التي استنتجها من القاعدتين الأولى و الثانية.

٤ - القاعدة الرابعة (الصفحة ٢١٨):

ثم يعطي الأقليدسي قاعدة تمهيدية لإيجاد الجذر التربيعي لعدد أصم بالتقريب وهي:

$$\sqrt{N} = \frac{\sqrt{N.\,a^{2\,k}}}{a^k}$$

(حيث: N = عدد أصم، K = عدد ما)

٥ - القاعدة الخامسة (الصفحة ٢١٩):

ويضيف الأقليدسي قاعدة تمهيدية أخرى لإيجاد الجذر التربيعي لعدد أصم

بالتقريب بطريقة الأصفار وهي:

$$\sqrt{N} = \frac{\sqrt{N.10^{2k}}}{10^k}$$

(حيث: N = عدد أصم، K = عدد ما)

٢ - الجذر التكعيبي للأعداد الصم:

في الباب الحادي والثلاثين (في استخراج أضلاع الأعداد التي لاجذر لها) من الفصل الرابع يشير الأقليدسي إلى عدة قواعد وهي:

١ - القاعدة الأولى (الصفحة ٤١٦):

$$\sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{a^3 + r} \approx a$$

يحسب المؤلف قيمة المقدار $(a+1)^3$ فإن كانت أكثر من العدد المطلوب جذره التكعيبي (N)، قرر بأن العمل صحيح.

٢ - القاعدة الثانية (الصفحة ٤١٧):

يعطي الأقليدسي قاعدة تمهيدية لإيجاد الجذر التكعيبي لعدد أصم بالتقريب وهي:

$$\sqrt[3]{N} = \frac{\sqrt[3]{N.a^3}}{a}$$

٣ - القاعدة الثالثة (الصفحة ٤١٨):

ويضيف الأقليدسي قاعدة تمهيدية أخرى لإيجاد الجذر التكعبي لعدد أصم بالتقريب بطريقة الأصفار وهي:

$$\sqrt[3]{N} = \frac{\sqrt[3]{N.10^{3k}}}{10^k}$$

(حيث: N = عدد أصم، K = عدد ما)

٤ - القاعدة الرابعة (الصفحتان ٤٢٠-٤٢١):

ويشير الأقليدسي إلى قاعدة تمهيدية لإيجاد الجذر التكعيبي للكسور الصم وهي:

$$\sqrt[3]{\frac{N}{M}} = \frac{\sqrt[3]{N.M^2}}{M}$$

٥ - مبادئ عامة (الصفحتان ٥٠٢-٥٠٦):

يستنتج محقق الكتاب عدة مبادئ من كتاب الأقليدسي وهي:

* N3=N.N.N
* $(A+B)^3=A^3+B^3+3A.B^2+3B.A^2$

(وهي القاعدة التي يطبقها لإيجاد الجذر التكعيبي)

* $(A+10B)^3=A^3+30A^2.B+300A.B^2+1000B^3$

- يجب حفظ مكعبات الأعداد من (١) إلى (٩) عن ظهر قلب.
- المكعب الكامل قد يكون رقم آحاده أي عدد من(١) إلى (٩).
- المكعب الكامل الذي يبدأ بأصفار يكون عدد هذه الأصفار من مضاعفات الثلاثة.
- حاصل ضرب مكعبين كاملين مكعب كامل أي:

$$\sqrt[3]{A^3.\ B^3} = \sqrt[3]{N^3}$$

٣ - كتاب «المنازل السبع» لأبي الوفاء البوزجاني[١](٣٢٨هـ- ٩٤٠م- ٣٨٨هـ - ٩٩٨م):

- الجذر التربيعي للأعداد الصم:

لم يلتزم أبو الوفاء البوزجاني بقاعدة محددة لإيجاد الجذر التربيعي لعدد أصم وذلك من خلال الأمثلة الواردة في كتابه - فعلى سبيل المثال (الصفحة ٢٢٧):

---

(١) **البوزجاني، تاريخ علم الحساب العربي - الجزء الأول (حساب اليد) - تحقيق لكتاب المنازل السبع** لأبي الوفاء البوزجاني، مع مقدمة ودراسة بالمقارنة بكتاب الكافي في الحساب لأبي بكر الكرجي الحاسب، بقلم أحمد سليم سعيدان، عمان بالأردن، ١٩٧١م.

«.... فكان ثلاثمائة أخذنا جذره، فما حصل فهو الوتر، وهو بالتقريب سبعة عشر وخمس وسبع».

وبحساب الجذر بحسب القاعدة المتبعة في ذلك العصر وهي:

$$\sqrt{N}=\sqrt{a^2+r}\approx a+\frac{r}{2a+1}$$

أي

$$\sqrt{300}=\sqrt{289+11}=\sqrt{(17)^2+11}\approx 17+\frac{11}{2.17+1}=17+\frac{11}{35}$$

بينما النتيجة عند البوزجاني هي:

$$\sqrt{300}\approx 17+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}=17+\frac{12}{35}$$

أي يقرّب البوزجاني القسم الكسري من النتيجة من $\frac{11}{35}$ إلى $\frac{12}{35}$ كي يستطيع تحويله إلى كسور بسيطة $\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)$.

ومثل هذه الأمثلة تتكرر في أكثر من موضع من كتابه.

٤ - الكافي في الحساب لأبي بكر محمد بن الحسن الكرجي[1](توفي سنة ٤١٩هـ- ١٠٢٩م):

يبحث الكرجي في الجذور التربيعية في الباب التاسع والثلاثين (باب استخراج الجذور)، ويعطي الكرجي عدة قواعد لإيجاد الجذر التربيعي للأعداد الصم بالتقريب.

١ - القاعدة الأولى (الصفحة ١٢٠):

$$*\ \sqrt{N}=\sqrt{a^2+r}\approx a+\frac{r}{2a+1}$$

(١) **الكرجي**، أبو بكر محمد بن الحسن، **الكافي في الحساب**، درسه وحققه وشرحه سامي شلهوب، منشورات معهد التراث العلمي العربي بجامعة حلب، ١٩٨٦م.

(حيث: N = عدد أصم).

٢ - القاعدة الثانية (الصفحة ١٢٠):

يذكر الكرجي طريقة تمهيدية لإيجاد الجذر التربيعي للأعداد الصم بالتقريب، ويؤكد بأنها أقرب من الطريقة السابقة وهي:

$$* \sqrt{N} = \frac{\sqrt{N \, . \, a^2}}{a}$$

(حيث: N = عدد أصم).

٣ - القاعدة الثالثة (الصفحة ١٢٢):

نستنتج أن الكرجي استخدم قاعدة ثالثة عندما أوجد جذر المقدار (٥٣٩) وهي:

$$* \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a + 2}$$

(حيث: N = عدد أصم).

٥ - كتاب التكملة في الحساب لعبد القاهر بن طاهر البغدادي[١] (توفي سنة ٤٢٩هـ- ١٠٣٧م):

درس ابن طاهر البغدادي الأعداد الصم وجذورها في أكثر من موضع في كتابه:

١ - الجذر التربيعي للأعداد الصم (الصفحة ٧٦):

- يذكر ابن طاهر البغدادي في كتابه **التكملة في الحساب** أن محمد بن موسى الخوارزمي حسب الجذر التربيعي لمقدار أصم بالتقريب، واعتمد القاعدة التالية:

(١) **ابن طاهر البغدادي**، عبد القاهر، **التكملة في الحساب** (مع رسالة للمؤلف في المساحة)، تحقيق أحمد سليم سعيدان، معهد المخطوطات العربية، الكويت، ١٩٨٥م.

$$* \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a}$$

(حيث: N = عدد أصم).

– ويقول: إن أكثر الحسّاب اعتمدوا القاعدة التالية:

$$* \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a + 1}$$

(حيث: N = عدد أصم).

– ويعطي ابن طاهر البغدادي قاعدة ثانية (الصفحتان ٧٦–٧٧) وهي:

$$* \sqrt{N} = \frac{\sqrt{N.a^{2k} \cdot b^{2k}}}{a^k \cdot b^k}$$

(حيث: N = عدد أصم).

– ويزودنا ابن طاهر البغدادي بقاعدة ثالثة في الفصل الرابع: في إخراج الجذور بالأصفار (الصفحة ٧٩):

$$* \sqrt{N} = \frac{\sqrt{N.10^{2k}}}{10^k}$$

(حيث: N = عدد أصم).

٢ - الجذر التكعيبي للأعداد الصم:

– في الفصل الثاني: في إخراج كعاب المكعبات الصم بالتقريب (الصفحة ٨٩) يعطي ابن طاهر القاعدة التالية:

$$* \sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{a^3 + r} \approx a + \frac{r}{3a\,(a + 1) + 1}$$

(حيث: N = عدد أصم).

– ويقدم القاعدة التمهيدية لإيجاد الجذر التكعيبي في الفصل الثالث: في إخراج الكعاب بالأصفار (الصفحتان ٩٠–٩١):

$$* \sqrt[3]{N} = \frac{\sqrt[3]{N \cdot 10^{3k}}}{10^k}$$

(حيث: N = عدد أصم، k = عدد ما).

٣ - جمع الجذور الصم وتفريقها (الصفحتان ٢٠٨، ٢١١):

$$* \ \sqrt{a} \mp \sqrt{b} = \sqrt{a + b \mp 2\sqrt{a.b}}$$

(حيث: a = عدد أصم، b = عدد أصم، $a > b$).

٤ - ضرب الجذور التكعيبية وتفريقها (الصفحتان ٢١٣-٢١٤):

يعطي عبد القاهر بن طاهر البغدادي القواعد التالية:

$$a.\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3.\,b} \qquad * \ \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a.b}$$

$$* \ \frac{a}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a^3}{b}} \qquad * \ \frac{\sqrt[3]{a}}{b} = \sqrt[3]{\frac{a}{b^3}} \qquad * \ \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

٥ - جمع الجذور التكعيبية وتفريقها (الصفحتان ٢١٥ - ٢١٧):

$$* \ \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a + b + \sqrt[3]{27a^2b} + \sqrt[3]{27a\,.\,b^2}}$$

(حيث: a = عدد أصم، b = عدد أصم).

$$* \ \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a + \sqrt[3]{27a.\,b^2} - (b + \sqrt[3]{27a^2\,.\,b})}$$

(حيث: a = عدد أصم، b = عدد أصم، $a > b$).

٦ - كتاب «تلقيح الأفكار في العمل برشوم الغبار لابن الياسمين»[١](توفي سنة ٦٠١هـ- ١٢٠٤م):

يعالج ابن الياسمين موضوع الأعداد الصم ويقدم قاعدة للجذر التربيعي.

---

(١) **ابن الياسمين، الأعمال الرياضية لابن الياسمين**، أطروحة ماجستير قدمها الطالب التهامي زمولي، في المدرسة العليا للأساتذة بالجزائر في سنة ١٩٩٣.

١ - قاعدة الجذر التربيعي لعدد أصم:

يشير ابن الياسمين إلى قاعدةٍ لإيجاد الجذر التربيعي لعدد أصم كما يلي: (الصفحة ٢٤٧) «واعلمْ أنَّ كلَّ عددٍ غيرِ مجذورٍ فإنَّهُ واقعٌ بينَ عددينِ مجذورينِ فيوجد جذرهُ بتقريبٍ. وذلكَ أنْ تأخذَ أقربَ العددينِ المجذورينِ إليهِ فما بقيَ أو ما تداركَ بعدَ ضربِ الجذرِ في نفسِهِ فسمه من ضعفِ الجذرِ فإنْ كان المُسمَّى منْ ضعفِ الجذر ما بقيَ حملتهُ على الجذرِ فما كانَ فهوَ جذرُ العددِ بالتقريبِ. وإنْ كانَ المسمَّى منْ ضعفِ الجذرِ، ما تدارك أسقطته منَ الجذرِ فما بقيَ فهو جذرُ العددِ».

يمكننا التعبير عما قاله ابن الياسمين كما يلي (الصفحة ٦٩):

N: عدد أصم، وبالتالي يمكننا كتابة العلاقة التالية:

$$a^2 < N < (a+1)^2$$

أي لدينا حالتين:

- **الحالة الأولى:**

– العدد المطلوب جذره أكبر من مربع الجذر أي: $N = a^{٢} + r$

وبالتالي يكون:

$$* \ \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \Rightarrow \sqrt{N} \approx a + \frac{r}{2a}$$

- **الحالة الثانية:**

– العدد المطلوب جذره أصغر من مربع الجذر أي:

$$N = (a+1)^2 - r$$

وبالتالي يكون:

$$* \ \sqrt{N} = \sqrt{(a+1)^2 - r} \Rightarrow \sqrt{N} \approx (a+1) - \frac{r}{2\,(a+1)}$$

– يحدد ابن الياسمين العددين المجذورين $[(a+1)^2,\ a^2]$ اللذين يقع العدد المطلوب جذره (N) بينهما، ويختار القاعدة الأولى أو القاعدة الثانية اعتمادًا على الفرق الأقل بين العدد المجذور والعدد المطلوب جذره.

٧ - كتاب «فقه الحساب» لأبي جعفر أحمد بن إبراهيم بن منعم العبدري[١](توفي سنة ٦٢٦هـ- ١٢٢٨م):

يعالج ابن منعم العبدري موضوع إيجاد الجذر التربيعي والجذر التكعيبي بالتقريب في الجزء الأخير من كتابه.

١ - الجذر التربيعي للأعداد الصم:

يدرس ابن منعم الموضوع في فقرة: «صنعة أخذ الجذور والضلع بالتقريب من الباب الثاني من الجزء العملي في الحساب» (الصفحات ٣٤٣–٣٤٧) :

أ - القاعدة الأولى (الصفحة ٣٤٤):

$$* \sqrt{N} = \sqrt{a^2 \mp r} \approx a \mp \frac{r}{2a}$$

ب - القاعدة الثانية (الصفحة ٣٤٦):

$$* \sqrt{N} = \frac{\sqrt{N.a^2}}{a}$$

٢ - الجذر التكعيبي للأعداد الصم:

يقدم ابن منعم الطريقة في فصل:«في استخراج أضلاع المكعبات الصم على التقريب» (الصفحات ٣٤٧–٣٥٤):

أ - القاعدة الأولى (الصفحة ٣٥٠):

---

(١) **ابن منعم العبدري**، أبو جعفر أحمد بن إبراهيم، **فقه الحساب**، تقديم إدريس لمرابط، دار الأمان، الرباط، ٢٠٠٥م.

$$* \sqrt[3]{N} \approx a + \sqrt{\left[\frac{3a^2}{2(3a+1)}\right]^2 + \frac{N - a^3}{3a + 1}} - \frac{3a^2}{2(3a+1)}$$

{ حيث: $[a^3 \leq N \leq (a+1)^3]$,N عدد أصم }

ب - القاعدة الثانية (الصفحة ٣٥٠):

$$* \sqrt[3]{N} \approx (a+1) + \sqrt{\left[\frac{3(a+1)^2}{2(3a+2)}\right]^2 + \frac{(a+1)^3 - N}{3a + 2}} - \frac{3(a+1)^2}{2(3a+2)}$$

{ حيث: $[a^3 \leq N < (a+1)^3]$,N عدد أصم }

٨ - كتاب «جوامع الحساب بالتخت والتراب»[١] (ألف الكتاب سنة ٦٦٣هـ) لنصير الدين الطوسي (٥٩٧-٦٧٢هـ- ١٢٠١ - ١٢٧٤م):

يشير الطوسي في بداية الكتاب إلى ما يلي (الصفحة ١١٣): «وبعد فهذا مختصر في ذكر الأعمال التي يحتاج إليها الحسّاب، موسوم **بجوامع الحساب بالتخت والتراب**، وهو مرتب في فصول تشتمل عليها ثلاثة أبواب».

ويقول محقق الكتاب ما يلي (الصفحة ١١٢): «والمخطوط، كما يتبين من اسمه، في الحساب الهندي. وقيمته ليست مستمدة من قيمة مؤلفه فقط، ولكنه يمثل مرحلة وسطًا في تطوير الحساب الهندي ويحوي واحدة من المآثر الإسلامية في الحساب، تلك هي استخراج الجذور العليا بطريقة تنطوي على معرفة بما سمي فيما بعد بمثلث بسكال».

من الموضوعات التي يعالجها الكتاب:

---

(١) **الطوسي**، نصير الدين، **جوامع الحساب بالتخت والتراب**، تحرير أحمد سليم سعيدان، مجلة أبحاث، الجامعة الأمريكية، بيروت، ١٩٦٧، (لايوجد على المصدر المستعمل رقم المجلد ولا رقم العدد).

- **الجذر التربيعي للأعداد الصم:**

نستنتج قاعدة إيجاد الجذر التربيعي لعدد أصم بالتقريب - التي يستخدمها الطوسي - من خلال مثاله على مقدار أصم يتضمن عددًا صحيحًا وكسرًا، وهي (الصفحتان ٢٤٦ - ٢٤٧):

$$* \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a + 1}$$

(حيث N = عدد أصم)

ويسمي الطوسي القاعدة السابقة «بالطريق المذكور» ويسمي المخرج (2a + 1) بالمخرج الاصطلاح (هامش الصفحة١٤٢).

- **الجذر النوني للأعداد الصم:**

عمم الطوسي القاعدة السابقة حتى صارت بالشكل التالي (الصفحة٢٤٨، الصفحة١٥٩):

$$* \sqrt[n]{N} = \sqrt[n]{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{(2a + 1)^n - a^n}$$

(حيث N = عدد أصم)

ويذكر سعيدان(١) أن القاعدة المذكورة قد عرفت في الشرق من قبل عهد الطوسي، ويدعم سعيدان ما يطرحه بأن المخرج $[(a + 1)^n - a^n]$ سماه الطوسي بالمخرج الاصطلاحي مما يشير إلى أنه يذكر ما اصطلح عليه من قبله.

- يشير الطوسي إلى قاعدة ثانية لإيجاد الجذر التربيعي لعدد أصم بالتقريب وهي:

---

(١) **الأموي**، يعيش بن إبراهيم، مراسم الانتساب في معالم الحساب، تحقيق أحمد سليم سعيدان، منشورات معهد التراث العلمي العربي بجامعة حلب، ١٩٨١، الصفحة ٩٥ (تعليقات سعيدان).

$$* \sqrt{N} = \frac{\sqrt{N.10^{2k}}}{10^k}$$

(حيث N = عدد أصم)

ويسميها الطوسي (الصفحتان ٢٧٥-٢٧٦) «استخراج أضلاع المضلعات الصم بالأصفار»، والجزء الكسري من الجذر يحوله الطوسي إلى كسور ستينية.

٩ - أساس القواعد في أصول الفوائد لكمال الدين الفارسي[١]**(توفي سنة ٧١٨هـ- ١٣١٩م):**

يُعَدّ كتاب **أساس القواعد في أصول الفوائد** شرحًا لكتاب **الفوائد البهائية في القواعد الحسابية** لعبد الله بن محمد الخوام البغدادي (توفي بعد سنة ٧٢٤هـ/ ١٣٢٤م).

يخصص الفارسي عدة فصول من المقالة الأولى لدراسة الأعداد الصم، ويركز بشكل أساسي على إيجاد الجذر التربيعي للأعداد الصم.

- الجذر التربيعي للأعداد الصم:

يعطينا ابن محمد الخوام البغدادي والفارسي القواعد التالية:

أ - القاعدة الأولى (Vol.II, P.1031):

$$* \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a + 1}$$

(حيث N = عدد أصم)

ب - القاعدة الثانية (Vol.II, P.1032):

$$* \sqrt{N} = \frac{\sqrt{N.\, a^2}}{a}$$

---

(1) MAWALDI (M)., L'Algèbre de Kamāl Al – Dīn Al – Fārisī, (Édition critique, Analyse mathématique et Étude historique), En 3 Tomes, (Thèse du Nouveau Doctorat), (Paris III), 1989

(حيث N = عدد أصم)

ويبرهن الفارسي على دقة القاعدة الثانية أكثر من القاعدة الأولى.

ويشير الفارسي إلى أنه سيلحق في نهاية كتابه طريقة استخراج الجذر من الدرجة n، ولكن لانجد شيئًا حول هذا الموضوع في نهاية الكتاب.

ج - القاعدة الثالثة (Vol.III, P.1027):

$$* \sqrt{N} = \frac{\sqrt{N.\,10^{2k}}}{10^k}$$

(حيث N = عدد أصم)

يحاول الفارسي أن يوضح الطريقة باستخدام مقدمات، ويذكر أن قاعدة الأصفار هي حالة خاصة من القاعدة السابقة.

١٠ - كتاب تلخيص أعمال الحساب لابن البناء المراكشي[(١)] (٦٥٤هـ- ١٢٥٦م - ٧٢١هـ- ١٣٢١م):

أعطى ابن البناء عدة قواعد للأعداد الصم وبشكل مكثف جدًا:

١ - الجذر التربيعي للأعداد الصم:

يقدم ابن البناء القواعد التالية:

أ - القاعدة الأولى (الصفحة ٦٤):

$$* \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a}$$

(حيث: $N, a \geq r$ = عدد أصم)

ب - القاعدة الثانية (الصفحة ٦٤):

$$* \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a+1}$$

(١) ابن البناء المراكشي، **تلخيص أعمال الحساب**، حققه وترجمه وعلّق عليه محمد سويسي، منشورات الجامعة التونسية، ١٩٦٩.

(حيث: $r < a,N$ = عدد أصم)

ج - **القاعدة الثالثة** (الصفحة ٦٤):

$$* \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a+2}$$

(حيث: $r < a,N$ = عدد أصم)

د - **القاعدة الرابعة** (الصفحة ٦٤):

$$* \sqrt{N} = \frac{\sqrt{N.a^2}}{a}$$

(حيث: $a^2 < N,N$ = عدد أصم)

٢ - **تجذير الكسور** (الصفحة ٦٤):

$$* \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a.b}}{b}$$

٣ - **تجذير ذوات الأسماء والمنفصلات** (الصفحة ٦٥):

$$* \sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\sqrt{\frac{a}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{a-b}} \pm \sqrt{\sqrt{\frac{a}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{a-b}}$$

(حيث: $a > b$)

٤ - **العمليات الحسابية الأخرى على جذور الأعداد:**

- **جمع جذور الأعداد وطرحها** (الصفحة ٦٥):

$$* \sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm \sqrt{a.b}}$$

ب - **ضرب جذور الأعداد** (الصفحة ٦٦):

$$* \sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{a.b} \qquad * a.\sqrt{b} = \sqrt{a^2.b}$$

ج - **قسمة جذور الأعداد** (الصفحة ٦٦):

$$* \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \qquad * \frac{a}{b \pm \sqrt{C}} = \frac{a(b \pm \sqrt{C})}{b^2 - C}$$

ولم يتطرق ابن البناء إلى الجذور التكعيبية.

١١ - كتاب رفع الحجاب عن وجوه أعمال الحساب لابن البنا المراكشي[١] (توفي سنة ٧٢١هـ- ١٣٢١م)

خصص ابن البنا المراكشي في كتابه **رفع الحجاب...**« القسم الثالث من الكتاب في الجذور»، عالج فيه الجذور التربيعية للأعداد الصم.

١ - الجذر التربيعي للأعداد الصم:

يقدم ابن البنا القواعد التالية:

أ - القاعدة الأولى (الصفحة ٢٨٥):

$$* \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a}$$

(حيث: N = عدد أصم، $a^2 < N$)

ب - القاعدة الثانية (الصفحة ٢٨٥):

$$* \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a - \frac{a^2 - N}{2a}$$

(حيث: N = عدد أصم، $a^2 > N$)

ج - القاعدة الثالثة (الصفحة ٢٨٦):

يذكر ابن البنا طريقة تمهيدية لإيجاد الجذر التربيعي للأعداد الصم بالتقريب:

---

(١) ابن البنا المراكشي، **رفع الحجاب عن وجوه أعمال الحساب**، تحقيق محمد أبلاغ، منشورات كلية الآداب والعلوم الإنسانية، جامعة سيدي محمد بن عبد الله، فاس – المغرب، ١٩٩٤.

$$* \sqrt{\frac{N}{M}} = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{M}} = \frac{\sqrt{N.M}}{M}$$

١٢ - مراسم الانتساب في معالم الحساب ليعيش بن إبراهيم الأموي[١] (توفي سنة ٧٧٤هـ-١٣٥٣م)

يدرس يعيش بن إبراهيم الأموي الجذور الصم ويعالج الموضوعات التالية:

١ - الجذر التربيعي للأعداد الصم:

يقدم الأموي القواعد التالية:

أ - القاعدة الأولى (الصفحة ٥٤):

(إذا كان: $a > r$)

$$* \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a}$$

ب - القاعدة الثانية (الصفحة ٥٤):

(إذا كان: $a < r$)

$$* \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx (a+1) - \frac{r}{2(a+1)}$$

ج - القاعدة الثالثة (الصفحة ٥٤):

(إذا كان: $a \leq r$)

$$* \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r+1}{2a+2}$$

٢ - العمليات الحسابية على الجذور التربيعية الصم:

- مضاعفة الجذر وتقسيمه (الصفحة ٥٤):

$$* \frac{1}{a}\sqrt{N} = \sqrt{\frac{N}{a^2}} \qquad * a\sqrt{N} = \sqrt{a^2 N}$$

(١) **الأموي**، يعيش بن إبراهيم، **مراسم الانتساب في معالم الحساب**، تحقيق أحمد سليم سعيدان، منشورات جامعة حلب – معهد التراث العلمي العربي –، حلب ١٩٨١م.

- **جمع الجذور الصم وطرحها** (الصفحة ٥٥، ٦٠-٦٢):

$$* \sqrt{N} \pm \sqrt{M} = \sqrt{N \pm 2\sqrt{N.M} + M}$$

$$* \sqrt{\sqrt{N} \pm \sqrt{M}} = \sqrt{\sqrt{\frac{N}{4}} + \sqrt{\frac{N-M}{4}}} \pm \sqrt{\sqrt{\frac{N}{4}} - \sqrt{\frac{N-M}{4}}}$$

(حيث: $N > M$)

- **جذر الكسور الصم** (الصفحة ٧٠): $* \sqrt{\frac{N}{M}} = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{M}} = \frac{\sqrt{N.M}}{M}$

٣ - الجذر التكعيبي للأعداد الصم:

يعرض الأموي القاعدة التالية (الصفحة ٦٤): $* \sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{a^3 + r_1}$

(حيث a^3 = أكبر مكعب كامل في العدد، r_1 = الفضلة).

أو: $* \sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{(a+1)^3 + r_2}$

(حيث $(a+1)^3$ = مكعب كامل فوق العدد، r_2 = الفضلة).

هناك حالتان:

- **الحالة الأولى:** $r_2 > r_1$

نطبق القاعدة التالية: $* \sqrt[3]{N} \approx a + \frac{r_1}{3\,a^2}$

- إذا كان $a^2 \leq r_1$ نطبق القاعدة التالية: $* \sqrt[3]{N} \approx a + \frac{r_1 + 1}{3\,a^2 + 4}$

- **الحالة الثانية:** $r_1 > r_2$

نطبق القاعدة التالية: $* \sqrt[3]{N} \approx (a+1) - \frac{r_2}{3\,(a+1)^2}$

٤ - **العمليات الحسابية على الجذور التكعيبية الصم:**

- **جمع الجذور التكعيبية الصم وطرحها** (الصفحة ٦٤):

$$* \sqrt[3]{N} \pm \sqrt[3]{M} = \sqrt[3]{(N + 3\sqrt[3]{N.M^2}) \pm (M + 3\sqrt[3]{M.N^2})}$$

- أو: (الصفحة ٦٤)

$$* \sqrt[3]{N} \pm \sqrt[3]{M} = \left(\sqrt[3]{(\frac{N}{M} \pm 1}\right) \sqrt[3]{M}$$

- **قسمة جذر تكعيبي على جذر تكعيبي** (الصفحة ٧٠):

$$* \sqrt[3]{\frac{N}{M}} = \frac{\sqrt[3]{N}}{\sqrt[3]{M}} = \frac{\sqrt[3]{N.\ M^2}}{M}$$

١٣ - كتاب «مفتاح الحساب» لجمشيد الكاشي[١] (توفي سنة ٨٣٣-٨٣٤ هـ - ١٤٢٩م):

يدرس الكاشي العمليات الرياضية على الأعداد الصم بشكل مفصل، ويقدم عدة قواعد وهي:

١ - **الجذر التربيعي للأعداد الصم:**

يعطي الكاشي عدة طرق لإيجاد الجذر التربيعي لعدد أصم، وقد استنتجناها اعتمادًا على الأمثلة الواردة في كتابه:

أ - **القاعدة الأولى** (الصفحة ٧٣):

$$* \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a}$$

---

(١) **الكاشي**، جمشيد، مفتاح الحساب، تحقيق نادر النابلسي مطبوعات وزارة التعليم العالي، دمشق، ١٩٧٧.

(حيث: N = عدد أصم)

ب - القاعدة الثانية (الصفحة ٧٣):

$$* \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a + 1}$$

(حيث: N = عدد أصم)

حيث يسمي الكاشي نتيجة هذه القاعدة جذر العدد الأصم «بالتقريب الاصطلاحي» (الصفحة ٧٣)، ويعتبر الكاشي تلك القاعدة من «تنقيحه» (الصفحة ٧٦).

ج - القاعدة الثالثة (الصفحة ١٤٠):

$$* \sqrt[n]{N} = \frac{\sqrt[n]{N.\, a^{n.k}}}{a^k}$$

- ومن القاعدة السابقة يمكننا استخلاص قاعدة الجذر التربيعي لعدد أصم كما يلي:

وكلما كان a^{2k} أكبر كانت النتيجة أدق. (حيث: N = عدد أصم)

$$* \sqrt{N} = \frac{\sqrt{N.\, a^{2k}}}{a^k}$$

د - القاعدة الرابعة (الصفحة ١٤١):

$$* \sqrt[n]{N} = \frac{\sqrt[n]{N.10^{n.k}}}{10^k}$$

- ومن القاعدة السابقة يمكننا استخلاص قاعدة الجذر التربيعي لعدد أصم كما يلي:

$$* \sqrt{N} = \frac{\sqrt{N.10^{2k}}}{10^k}$$

وكلما كان 10^{2k} أكبر كانت النتيجة أدق. (حيث: N = عدد أصم)

- أخيرًا يشرح الكاشي طريقة استخراج الجذر من الدرجة n (الصفحات ٧٧-١٠٠).

١٤ - كتاب «تبصرة المبتدي بالقلم الهندي» لعلي بن محمد بن علي القرشي الشهير بالقلصادي (١٤١٢-١٤٨٦م):

لم نتمكن من الحصول على المخطوطة الكاملة **لكتاب تبصرة المبتدي بالقلم الهندي** للقلصادي ولذلك اعتمدنا على دراسة الباحث نجيب بولحية لتلك المخطوطة.

- الجذر التربيعي للأعداد الصم:

لم نجد في الجزء المنشور من كتاب **تبصرة المبتدي** ... للقلصادي مايشير إلى إسهامه في موضوع الجذر التربيعي للأعداد الصم، ولكن الدارس للكتاب يذكر بأن القلصادي قد أورد القوانين التالية[١]:

- القاعدة الأولى:

(حيث: $r \leq a$, $N =$ عدد أصم)

$$* \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a}$$

- القاعدة الثانية: (حيث: $r > a$, $N =$ عدد أصم)

$$* \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r+1}{2a+2}$$

- القاعدة الثالثة:

ويذكر الباحث بأن القلصادي استعمل قيمة تقريبية ذات ثلاثة عناصر وهي:

(1) Boulahia, Algorithmes..., OP. Cit., P.28.

$$* \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx \left(a + \frac{r}{2\,a}\right) - \frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a + \frac{r}{2a}\right)}$$

وقد أشار سميث[١] (Smith) في حواشي كتابه **تاريخ الرياضيات** على استعمال الحصار(من القرن الثاني عشر الميلادي) للقاعدتين الثانية والثالثة ويؤكد يوشكوفيتش[٢] (Youschkevitch) على استخدام الحصار للقاعدة الثالثة.

- **القاعدة الرابعة:**

وأعطى القلصادي[٣]صيغة رابعة لإيجاد الجذر التربيعي للأعداد الصم بالتقريب وهي:

$$* \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx \frac{4\,a^3 + 3\,a\,r}{4\,a^2 + \ r}$$

يقول الباحث – اعتمادًا على ما قاله طوقان في كتابه **تراث العرب العلمي في الرياضيات والفلك** – أن الصيغة الرابعة والأخيرة التي استعملها ترتاجليا (Tartaglia) وقال عنها قنتر (Günther) كانت منطلقًا للكسور المستمرة التي استعملها العرب لإيجاد الجذور التربيعية للأعداد الصم[٤]، وفعلاً عندما نلاحظ ما يلي:

$$* \sqrt{a^2 + r} \approx \frac{4\,a^3 + 3\,a\,r}{4\,a^2 + \ r} = a + \frac{r}{2\,a + \frac{r}{2\,a}}$$

$$= a + \frac{r}{a + \left(a + \frac{r}{2\,a}\right)}$$

(1) Smith, D.E., History of Mathematics, Volume II, Dover Publications, New York, 1958, P.254

(2) Youschkevitch,A., Les Mathématiques Arabes, Vrin, Paris, 1976, P.78.

(3) Boulahia, Algorithmes ..., OP.Cit., PP.28-29.

(4) Lamrabet, Driss., Introduction à l'Histoire des Mathématiques Maghrébines, Rabat, 1994, P.198.

معتمداً على المرجع التالي:

Gunther, Ceschichte der Mathematik, Leipzig, 1908.

وبما أن القيمة الأولى التقريبية للجذر التربيعي تعطى بالعلاقة التالية:

$$* \; x_1 = a + \frac{r}{2a}$$

فالقيمة الثانية التقريبية للجذر التربيعي تعطى بالعلاقة التالية:

$$* \; x_2 = a + \frac{r}{a + \left(a + \frac{r}{2a}\right)} \Rightarrow x_{n+1}$$

$$= a + \frac{r}{a + x_n} \quad \& \quad x_0 = a$$

ويقول الباحث[١]: بأنه في سنة ١٥٧٢م أتى الرياضي الايطالي بونبيلي (Bombelli) وأعطى علاقة التتالي التي استعملها القلصادي حتى المرحلة الثانية، ولذلك نجد علماء أوروبا وعلى رأسهم تنيري (Tannery) يقولون: إن مبتدع الكسور المستمرة هو بونبيلي.

١٥ - كتاب إرشاد الطلاب إلى وسيلة الحساب لسبط المارديني[٢] (توفي سنة ٩١٢هـ- ١٥٠٦م؟)

خصص سبط المارديني القسم الثالث من كتابه – المرتب على مقدمة وثلاثة أقسام وخاتمة – لأعمال الجذور: في بيانها واستخراجها وضربها وقسمتها وجمعها وطرحها.

يعرّف سبط المارديني معنى الجذر، ثم يقسم الجذر إلى قسمين: منطق أو غير منطق ويسمي الجذر غير المنطق جذرًا أصمًا، ثم يعالج الموضوعات التالية:

(1) Boulahia, Algorithmes ..., ..., OP.Cit . PP. 53, 21 (Partie Arabe).

(٢) سبط المارديني، بدر الدين محمد بن محمد، إرشاد الطلاب إلى وسيلة الحساب، تحقيق ودراسة وتحليل مصطفى موالدي، منشورات جامعة حلب – معهد التراث العلمي العربي–، حلب ١٤٢٥هـ/ ٢٠٠٤م.

١ - الجذر التربيعي للأعداد الصم:

يقدم سبط المارديني القواعد التالية:

أ - القاعدة الأولى (الصفحة ٤٠٣):

$$* \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{b}{2\,a}$$

(إذا كان $b \geq a$، و N = عدد أصم)

ولمزيد من الدقة والتقريب يطبق العلاقة التالية (الصفحة ٤٠٥):

$$* \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + b} \approx \left(a + \frac{b}{2\,a}\right) - \frac{\left(a + \frac{b}{2\,a}\right)^2 - N}{2\left(a + \frac{b}{2\,a}\right)}$$

وللزيادة في التقريب يعيد العملية السابقة ثانيًا وثالثًا وهكذا حتى يحصل على أدق تقريب.

ب - القاعدة الثانية (الصفحة ٤٠٣):

$$* \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b + 1}{2\,a + 2}$$

(حيث $b = 2a$، و N = عدد أصم)

٢ - ضرب الجذور الصم:

أ - ضرب الجذور الصم بعضها في بعض (الصفحة ٤٠٧):

قاعدة: $* \sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{a\,.\,b}$

ب - ضرب جذر أصم في عدد (صفحة ٤٠٧):

قاعدة: $* \sqrt{a}.b = \sqrt{a}.\sqrt{b^2} = \sqrt{a\,.\,b^2}$

ثم يختبر المؤلف صحة عملية التجذير وذلك بإجراء العملية العكسية – التربيع –، ويتطرق – في هذه العملية – إلى حالتين:

- إذا كان العدد منطقًا.

- إذا كان العدد أصم.

٢ - قسمة الجذور الصم:

نجد في كتاب إرشاد الطلاب القواعد التالية:

أ - قسمة جذر عدد على جذر عدد، أو تسميته منه

(الصفحة ٤٠٨):

قاعدة:

$$* \ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

ب - قسمة جذر أو تسميته منه وعكسه (الصفحة ٤٠٩):

قاعدة:

$$* \ \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a^2}{b}}$$

٣ - جمع جذر عدد إلى جذر عدد أو طرحه منه:

أ - الجذران مشتركان - أي إن كان مربعاهما مجذورين- (الصفحة ٤٠٩):

قاعدة:

$$* \ \sqrt{a} \mp \sqrt{b} = \sqrt{a + b \mp 2\sqrt{a \, . \, b}}$$

ب - الجذران متباينان - لايمكن جمعهما-، ويستحسن تركهما كما هما، وكذلك في الطرح.

يقدم سبط المارديني مجموعة كبيرة من الأمثلة العددية على كل قاعدة من القواعد السابقة، ولايتطرق – على الإطلاق – إلى الجذور التكعيبية للأعداد الصم في كتابه.

١٦- كتاب بغية الطلاب في شرح منية الحساب لابن غازي المكناسي الفاسي[١] (المتوفى سنة ٩١٩هـ- ١٥١٣م):

يعالج ابن غازي موضوع الأعداد الصم ويقدم عدة قواعد.

١ - الجذر التربيعي للأعداد الصم:

يعطي ابن غازي المكناسي عدة طرق لإيجاد الجذر التربيعي لعدد أصم وهي:

أ - القاعدة الأولى (الصفحة ١٤٨):

$$* \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a}$$

(حيث: N = عدد أصم، a r)

ب - القاعدة الثانية (الصفحة ١٤٨):

$$* \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r+1}{2a+2}$$

(حيث: N = عدد أصم، a < r)

ج - القاعدة الثالثة (الصفحتان ١٤٩-١٥٠):

$$* \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r+1}{2a+2} - \frac{\left(a + \frac{r+1}{2a+2}\right)^2 - N}{2\left(a + \frac{r+1}{2a+2}\right)}$$

(حيث: N = عدد أصم)

د - القاعدة الرابعة (الصفحة ١٥١):

$$* \sqrt{N} = \frac{\sqrt{N.\, a^{2k}}}{a^k}$$

(١) ابن غازي المكناسي الفاسي، أبو عبد الله محمد بن أحمد، بُغية الطلاب في شرح مُنية الحُسّاب، تحقيق وتقديم محمد سويسي، منشورات معهد التراث العلمي العربي بجامعة حلب، ١٩٨٣م.

(حيث: N = عدد أصم، $N < a^{2k}$)

٢ - الجذر التربيعي للكسور (الصفحات ١٥٢-١٥٧):

يدرس ابن غازي الجذر التربيعي للكسور، وذلك بتطبيق ذات القواعد السابقة على الأعداد الصم في البسط أو المقام.

١٧ - إرشاد العجم لأعمال الجذور الصم لمحمد بن أبي الفتح محمد بن الشرقي أبي الروح عيسى بن أحمد الصوفي (كان حيًا ٩٤٣هـ- ١٥٣٦م):

استعرضنا في دراستنا العلمية للمخطوطة كافة الأفكار والنظريات والطرق والمسائل الرياضية وبالتفصيل، وسنقدم في هذه الدراسة الطرق الرياضية الخاصة بإيجاد الجذور التربيعية والجذور التكعيبية للأعداد الصم.

- **الجذر التربيعي للأعداد الصم:** (الصفحة ١٤٨ من التحقيق):

$$* \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r + 1}{2\,a}$$

- **الجذر التكعيبي للأعداد الصم:**

إذا كان لدينا (N) عدد ليس له كعب حقيقي، فهو واقع بين مكعبين حقيقيين أي:

$$* \sqrt[3]{(A + 1)^3} > \sqrt[3]{N} > \sqrt[3]{A^3}$$

إذًا فنحن أمام حالتين:

١ - الحالة الأولى: $\Leftarrow \sqrt[3]{N} > \sqrt[3]{A^3}$

$$* \sqrt[3]{N} = A + \left\{ \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3\,A^2}{3\,A + 1}\right)\right]^2 + \frac{N - A^3}{3\,A + 1}} - \frac{1}{2}\left(\frac{3\,A^2}{3\,A + 1}\right) \right\}$$

٢ - الحالة الثانية:

$$\Leftarrow \sqrt[3]{N} < \left[\sqrt[3]{B^3} = \sqrt[3]{(A+1)^3}\right]$$

$$* \sqrt[3]{N} = B - \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3B^2}{3B-1}\right) - \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3B^2}{3B-1}\right)\right]^2 - \left[\frac{B^2-N}{3B-1}\right]}\right\}$$

١٨- رياضيات بهاء الدين العاملي[١] (٩٥٣-١٠٣١هـ ١٥٤٧ - ١٦٢٢م):

أشار العاملي في أحد أبحاثه إلى الجذر التربيعي للأعداد الصم.

- الجذر التربيعي للأعداد الصم: (الصفحة ٥٩، ١٨٣)

- يعطي العاملي قاعدة واحدة لإيجاد الجذر التربيعي للأعداد الصم وهي:

$$* \sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2a+1}$$

(حيث N = عدد أصم)

ولم يتطرق العاملي إلى الجذور التكعيبية.

❁❁❁

(١) **العاملي**، بهاء الدين، **رياضيات بهاء الدين العاملي**، تحقيق جلال شوقي، منشورات معهد التراث العلمي العربي بجامعة حلب، ١٩٧٦م.

ملخص نتائج الدراسة

نلخص نتائج دراستنا للنصوص الواردة في هذا البحث بجدول، نذكر فيه القوانين المطبقة لإيجاد الجذر التربيعي والجذر التكعيبي للأعداد الصم، ونثبت بجانب كل قانون أسماء العلماء الذين أشاروا إليه تبعًا لأقدميتهم.

وفيما يلي الجدول

الرقم المتسلسل	القانون	أسماء العلماء الذين أشاروا إليه تبعاً لأقدميتهم
١	$\sqrt{N}=\sqrt{a^2+r}\approx a+\frac{r}{2a}$ (حيث N: عدد أصم)	الخوارزمي، الأقليدسي، البغدادي، ابن الياسمين، ابن منعم، ابن البنا، الأموي، الكاشي، القلصادي، سبط المارديني، المكناسي.
٢	$\sqrt{N}=\sqrt{a^2+r}\approx a+\frac{r}{2a+1}$ (حيث N: عدد أصم)	الأقليدسي، البوزجاني، الكرجي، البغدادي، الطوسي، الفارسي، ابن البنا، الكاشي، العاملي.
٣	$\sqrt{N}=\sqrt{a^2+r}\approx a+\frac{r}{2a+\frac{1}{2}}$ (حيث N: عدد أصم)	الأقليدسي.
٤	$\sqrt{N}=\sqrt{a^2+r}\approx a+\frac{r}{2a+2}$ (حيث N: عدد أصم)	الكرجي، ابن البنا.

تابع الجدول

الرقم المتسلسل	القـــانـون	أسماء العلماء الذين أشاروا إليه تبعاً لأقدميتهم
٥	$\sqrt{N}=\sqrt{a^2+r}\approx a+\frac{r+1}{2a+2}$ (حيث :N عدد أصم)	الأموي، القلصادي، سبط المارديني (مع شرط)، المكناسي.
٦	$\sqrt{N}=\sqrt{(a+1)^2-r}\approx (a+1)-\frac{r}{2(a+1)}$ (حيث :N عدد أصم)	ابن الياسمين (مع شرط)، ابن البنا، الأموي.
٧	$\sqrt{N}=\sqrt{a^2+r}\approx \frac{4a^3+3ar}{4a^2+r}$ (حيث: N عدد أصم)	القلصادي
٨	$\sqrt{N}=\sqrt{a^2+r}\approx \left(a+\frac{r}{2a}\right)-\frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a+\frac{r}{2a}\right)}$ (حيث:Nعدد أصم)	القلصادي
٩	$\sqrt{N}=\sqrt{a^2+r}\approx a+\frac{(r+1)}{(2a+2)}-\frac{\left(a+\frac{r+1}{2a+2}\right)^2-N}{2\left(a+\frac{r+1}{2a+2}\right)}$ (حيث: N عدد أصم)، عندما يكون مربع الجذر أكبر من العدد المجذور	المكناسي
١٠	$\sqrt[n]{N}=\sqrt[n]{a^n+r}\approx a+\frac{r}{(a+1)^n-a^n}$ (حيث:Nعدد أصم)	الطوسي

تابع الجدول

الرقم المتسلسل	القـــانون	أسماء العلماء الذين أشاروا إليه تبعاً لأقدميتهم
١١	$\sqrt{N}=\frac{\sqrt{N.a^2}}{a}$ أو $\sqrt{N}=\frac{\sqrt{N.a^{2k}}}{a^k}$ (حيث: N عدد أصم) (قانون تمهيدي)	الأقليدسي، الكرجي، الفارسي، الكاشي، المكناسي.
١٢	$\sqrt{N}=\frac{\sqrt{N.10^{2k}}}{10^k}$ (حيث: N عدد أصم) (قانون تمهيدي)	الأقليدسي، البغدادي، الطوسي، الفارسي، الكاشي.
١٣	$\sqrt{N}=\frac{\sqrt{N.a^{2k}.b^{2k}}}{a^k.b^k}$ (حيث: N عدد أصم) (قانون تمهيدي)	البغدادي
١٤	$\sqrt{N}=\sqrt{a^2+r}\approx a+\frac{r+1}{2a}$	الصوفي
١٥	$\sqrt[3]{N}=\sqrt[3]{a^3+r}\approx a+\frac{r}{3a(a+1)+1}$ (حيث: N عدد أصم)	البغدادي
١٦	$\sqrt[3]{N}\approx a+\sqrt{\left[\frac{3a^2}{2(3a+1)}\right]^2+\frac{N-a^3}{3a+1}}-\frac{3a^2}{2(3a+1)}$ $\sqrt[3]{N}\approx (a+1)+\sqrt{\left[\frac{3(a+1)^2}{2(3a+2)}\right]^2+\frac{(a+1)^3-N}{3a+2}}-\frac{3(a+1)^2}{2(3a+2)}$ (حيث: N عدد أصم) و $\{[a^3\le N<(a+1)^3]$	ابن منعم

تابع الجدول

الرقم المتسلسل	القانون	أسماء العلماء الذين أشاروا إليه تبعاً لأقدميتهم
١٧	لدينا (N) عدد ليس له كعب حقيق فهو واقع بين مكعبين حقيقيين أي: $$\sqrt[3]{(a+1)^3} > \sqrt[3]{N} > \sqrt[3]{a^3}$$ **هناك حالتان:** **١ - الحالة الأولى:** $$\Rightarrow \sqrt[3]{N} > \sqrt[3]{a^3}$$ $$\sqrt[3]{N} \approx a + \left\{ \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3a^2}{(3a+1)}\right)\right]^2 + \frac{N-a^3}{3a+1}} - \frac{1}{2}\left(\frac{3a^2}{3a+1}\right) \right\}$$ **٢ - الحالة الثانية:** $$\Rightarrow \sqrt[3]{N} < \sqrt[3]{b^3} = \sqrt[3]{(a+1)^3}$$ $$\sqrt[3]{N} \approx b - \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{3b^2}{3b-1}\right) - \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3b^2}{(3b-1)}\right)\right]^2 - \left[\frac{b^2-N}{3b-1}\right]} \right\}$$ (حيث: N عدد أصم)	الصوفي

تابع الجدول

الرقم المتسلسل	القـــانون	أسماء العلماء الذين أشاروا إليه تبعاً لأقدميتهم
١٨	إذا كان لدينا: $* \sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{a^3 + r_1}$ حيث: a^3 = أكبر مكعب كامل في العدد، r_1 = الفضلة] $* \sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{(a+1)^3 + r_2}$ حيث: $(a+1)^3$ = أصغر مكعب كامل في العدد، r_2 = الفضلة] **هناك حالتان: الحالة الأولى:** $r_2 > r_1$ نطبق القاعدة التالية: $* \sqrt[3]{N} \approx a + \frac{r_1}{3a^2}$ – إذا كان $a^2 \leq r_1$ نطبق القاعدة التالية: $* \sqrt[3]{N} \approx a + \frac{r_1 + 1}{3a^2 + 4}$ **الحالة الثانية:** $r_1 > r_2$ $* \sqrt[3]{N} \approx (a+1) - \frac{r_2}{3(a+1)^2}$	الأموي
١٩	$\sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{a^3 + r} \approx a$ (حيث: N عدد أصم) يحسب المؤلف قيمة المقدار $(a+1)^3$ فإن كانت أكثر من العدد المطلوب جذره التكعيبي (N) قرر بأن العمل صحيح.	الأقليدسي

تابع الجدول

الرقم المتسلسل	القـــانـون	أسماء العلماء الذين أشاروا إليه تبعاً لأقدميتهم
٢٠	$\sqrt[3]{N} = \frac{\sqrt[3]{N \cdot a^3}}{a}$ (حيث: N عدد أصم) (قانون تمهيدي)	الأقليدسي
٢١	$\sqrt[3]{N} = \frac{\sqrt[3]{N \cdot 10^{3k}}}{10^k}$ (حيث:Nعدد أصم) (قانون تمهيدي)	الأقـــليـــدســي، البغدادي
٢٢	$\sqrt[3]{\frac{N}{M}} = \frac{\sqrt[3]{N \cdot M^2}}{M}$ (حيث:Nعدد أصم) (قانون تمهيدي)	الأقليدسي
٢٣	$\sqrt[n]{N} = \frac{\sqrt[n]{N \cdot a^{n \cdot k}}}{a^k}$ (حيث:Nعدد أصم)	الكاشي
٢٤	$\sqrt[n]{N} = \frac{\sqrt[n]{N \cdot 10^{n \cdot k}}}{10^k}$ (حيث:Nعدد أصم)	الكاشي

ملاحظات الدراسة

من خلال الدراسة والجدول المتضمن القوانين المتعلقة بإيجاد الجذر التربيعي والجذر التكعيبي للأعداد الصم بالتقريب نستطيع أن ندون الملاحظات التالية:

أ - ملاحظات خاصة بالجذر التربيعي للأعداد الصم:

١ - يُعتبر **الخوارزمي** أول من استخدم قانونًا لإيجاد الجذر التربيعي للأعداد الصم بالتقريب في الحضارة العربية/ الإسلامية، علمًا أن ذلك القانون قد ورد في أعمال رياضيي بابل فيما سبق.

٢ - لايهتم **الأقليدسي** كثيرًا بإيجاد الجذر التربيعي للأعداد الصم بالتقريب، بشكل دقيق، فمن خلال أمثلته يأخذ جذر أكبر مربع كامل صحيح في العدد الأصم ويهمل الباقي، وعلى الرغم من ذلك فإنه يحاول أن يبتكر ويعطي قاعدة لم يذكرها غيره وهي:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2\,a + \frac{1}{2}}$$

(حيث: N عدد أصم)

بالإضافة إلى القواعد الأخرى المشتركة مع القواعد الواردة في المؤلفات الرياضية الأخرى.

٣ - من المستغرب أن أبا **الوفاء البوزجاني** لم يهتم بموضوع إيجاد الجذر التربيعي للأعداد الصم بالتقريب، ولذلك لم يلتزم بقاعدة محددة.

٤ - وجدنا من النصوص المدروسة أن **الكرجي** أول من استخدم القانون التالي:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} \approx a + \frac{r}{2\,a + 2}$$

(حيث: N = عدد أصم)

ومن ثم نجد القانون سابق الذكر عند الرياضيين المغاربة كابن البنا المراكشي الذي تأثر بأعمال الكرجي.

٥ – يتفرّد **ابن طاهر البغدادي** بإعطاء القاعدة التالية:

$$\sqrt{N} = \frac{\sqrt{N.\, a^{2k}.\, b^{2k}}}{a^{k}.\, b^{k}}$$

(حيث: N = عدد أصم)

ويبرهن على دقتها بتطبيقها على مثال عددي.

٦ – أعطى **ابن الياسمين** القانون التالي:

$$\sqrt{N} \approx (a+1) - \frac{r}{2\,(a+1)}$$

(حيث : $N = (a+1)^{2-r}$، N = عدد أصم)

ومن ثم وجدنا القانون نفسه عند ابن البناء المراكشي ويعيش بن إبراهيم الأموي.

٧ – ورد عند **نصير الدين الطوسي** القانون العام التالي:

$$\sqrt[n]{N} = \sqrt[n]{a^{n}+r} \approx a + \frac{r}{(a+1)^{n} - a^{n}}$$

ويسمي **الطوسي** المخرج $\left[(a+1)^{n} - a^{n}\right]$ بالمخرج الاصطلاحي، ويؤكد المؤرخ سعيدان أن القانون معروف قبل الطوسي.

٨ – تميز **كمال الدين الفارسي** بمحاولته البرهنة على القوانين وتبيانه درجة دقة كل منها.

٩ - يعتبر **الكاشي** القاعدة التالية: $\sqrt{N}=\sqrt{a^2+r}\approx a+\frac{r}{2a+1}$ من تنقيحه ويسمي نتيجتها جذر العدد الأصم بالتقريب الاصطلاحي، علمًا أن هذه القاعدة قد عرفت وطبقت قبله بخمسمائة سنة!

١٠- طُوِّرت قواعد إيجاد الجذر التربيعي للأعداد الصم في المغرب العربي بشكل جيد، فقد أعطى **القلصادي** القواعد المهمة التالية:

$$1)\quad \sqrt{N}=\sqrt{a^2+r}\approx a+\frac{r+1}{2a+2}$$

(قد ذكرها **الأموي** قبل **القلصادي**)

$$2)\quad \sqrt{N}=\sqrt{a^2+r}\approx a+\left(\frac{r}{2a}\right)-\frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a+\frac{r}{2a}\right)}$$

$$3)\quad \sqrt{N}=\sqrt{a^2+r}\approx \frac{4a^3+3ar}{4a^2+r}$$

وتعتبر القاعدة الثانية من أدق القواعد الثلاث التي طرحها القلصادي، علمًا أن المؤرخين يؤكدون على نسبة القاعدة الثانية للحصار.

١١ - يقترح **ابن غازي المكناسي** قاعدة دقيقة جدًا وهي:

$$\sqrt{N}=\sqrt{a^2+r}\approx a+\frac{r+1}{2a+2}-\frac{\left(a+\frac{r+1}{2a+2}\right)^2-N}{2\left(a+\frac{r+1}{2a+2}\right)}$$

(عندما يكون مربع الجذر أكبر من العدد المجذور).

ولم تنتشر تلك القاعدة عند الرياضيين العرب.

١٢ - لم يذكر **بهاء الدين العاملي** في كتابه إلا قاعدة واحدة وهي:

$$\sqrt{N}=\sqrt{a^2+r}\approx a+\frac{r}{2a+1}$$

(حيث: N = عدد أصم)

يبدو أنها القاعدة الأكثر شيوعًا بين الرياضيين في عصر العاملي المتأخر.

ب - ملاحظات خاصة بالجذر التكعيبي للأعداد الصم:

١ - لم يهتم رياضيو الحضارة العربية / الإسلامية بالجذر التكعيبي للأعداد الصم كاهتمامهم بالجذر التربيعي للأعداد الصم وذلك لصعوبة عملياته الرياضية.

٢ - قدم **أبو الحسن أحمد بن إبراهيم الأقليدسي** في كتابه **الفصول في الحساب الهندي** (ألف الكتاب سنة ٣٤١هـ/ ٢-٩٥٣م) شكلاً بسيطًا جدًا لقيمة الجذر التكعيبي للأعداد الصم وهو: $\sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{a^3 + r} \approx a$

فكان يبحث عن أكبر مكعب في العدد ويهمل الباقي.

٣ - طور **عبد القاهر بن طاهر البغدادي** (توفي سنة ٤٢٩هـ/ ١٠٣٧م) قاعدة الجذر التكعيبي للأعداد الصم في كتابه **التكملة في الحساب** وهي:

$$\sqrt[3]{N} = \sqrt[3]{a^3 + r} \approx a + \frac{r}{3a\,(a+1)+1}$$

فكانت نسبة الخطأ لقيمة الجذر التكعيبي بشكل تقريبي أقل من قاعدة الأقليدسي.

٤ - قدم **أبو جعفر أحمد بن إبراهيم بن منعم العبدري** (توفي سنة ٦٢٦هـ/ ١٢٢٨م) في كتابه **فقه الحساب**، ومحمد بن أبي الفتح محمد بن الشرقي أبي الروح عيسى بن أحمد الصوفي (كان حيًا ٩٤٣هـ/ ١٥٣٦م) في كتابه **إرشاد العجم لأعمال الجذور الصم** خوارزمية متشابهة لإيجاد الجذر التكعيبي للأعداد الصم بشكل تقريبي وبدقة عالية جدًا وهي:

ابن منعم:

$$\sqrt[3]{N} \approx a + \sqrt{\left[\frac{3a^2}{2\,(3\,a+1)}\right]^2 + \frac{N-a^3}{3\,a+1}} - \frac{3\,a^2}{2\,(3\,a+1)}$$

$$\sqrt[3]{N} \approx (a+1) + \sqrt{\left[\frac{3(a+1)^2}{2(3a+2)}\right]^2 + \frac{(a+1)^3 - N}{3a+2}} - \frac{3(a+1)^2}{2(3a+2)}$$

{ حيث: N = عدد أصم و [a3 ≤ N < (a + 1)3]

الصوفي:

لدينا (N) عدد ليس له كعب حقيقي فهو واقع بين مكعبين حقيقيين أي:

$$\sqrt[3]{(a+1)^3} > \sqrt[3]{N} > \sqrt[3]{a^3}$$

هناك حالتان:

١ - الحالة الأولى:

$$\Rightarrow \sqrt[3]{N} > \sqrt[3]{a^3}$$

$$\sqrt[3]{N} \approx a + \left\{ \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3a^2}{(3a+1)}\right)\right]^2 + \frac{N - a^3}{3a+1}} - \frac{1}{2}\left(\frac{3a^2}{3a+1}\right) \right\}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{N} < \sqrt[3]{b^3} = \sqrt[3]{(a+1)^3}$$

٢ - الحالة الثانية:

$$\sqrt[3]{N} \approx b - \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{3b^2}{3b-1}\right) - \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{3b^2}{(3b-1)}\right)\right]^2 - \left[\frac{b^3 - N}{3b-1}\right]} \right\}$$

(حيث: N عدد أصم)

ولكن تلك الخوارزمية (**لابن منعم** أو **للصوفي** لم تنتشر بين الرياضيين العرب رغم أهميتها البالغة في إعطاء قيمة تقريبية دقيقة جدًا.

٥ – عمم **نصير الدين الطوسي** (٥٩٧ – ٦٧٢هـ/ ١٢٠١ – ١٢٧٤م) قاعدة إيجاد الجذر النوني للأعداد الصم بالقاعدة التالية:

$$\sqrt[n]{N} = \sqrt[n]{a^n + r} \approx a + \frac{r}{(a+1)^n - a^n}$$

(حيث: N عدد أصم)

ويشير أحد المؤرخين بأن القاعدة السابقة قد عرفت في الشرق قبل عهد **الطوسي**.

٦ – يعطي **يعيش بن إبراهيم الأموي** (توفي سنة ٧٧٤هـ/ ١٣٥٣م) قاعدة عملية لإيجاد الجذر التكعيبي للأعداد الصم بشكل تقريبي، وفصّل في الحالتين التاليتين:

حيث: a^3 = أكبر مكعب كامل في العدد.

و a^3 = أصغر مكعب كامل فوق العدد.

٧ – قدم الرياضيون العرب القواعد التمهيدية لإيجاد الجذر التكعيبي للأعداد الصم بشكل يشابه القواعد التمهيدية لإيجاد الجذر التربيعي للأعداد الصم، وعممها **الكاشي** (توفي سنة٨٣٣–٨٣٤هـ/ ١٤٢٩م) بالقاعدتين التاليتين):

$$\sqrt[n]{N} = \frac{\sqrt[n]{N.\, a^{n.k}}}{a^k}$$

(حيث: N عدد أصم)



الخاتمة

تعد مخطوطة **إرشاد العجم لأعمال الجذور الصم** لمحمد بن أبي الفتح الصوفي المصري مخطوطة نادرة وشاملة في موضوع أعمال الجذور الصم، وتتميز المخطوطة - أيضًا - باستخدامها للرموز المتنوعة، ودقة نتائجها البالغة التي تسبق عصرها، وتخصصها بموضوع دقيق وهام، وبمنهجها المنطقي السليم المتسلسل والمترابط، وعرضها لقوانين كثيرة صحيحة حتى عصرنا الحاضر.

إن الكشف عن هذه المخطوطة الهامة إضافة جديدة لتاريخ الرياضيات العربية، وخاصة في مجال مساهمة العلماء العرب في موضوع تطبيق العمليات الرياضية المختلفة على الأعداد الصم.

وتلقي المخطوطة الضوء على عمل من أعمال هذا العالم العربي الجليل الذي كتب في مجالات علمية دقيقة: الرياضيات والفلك والميكانيك، والذي لم تلق مؤلفاته الاهتمام، ونتمنى أن تحرض مخطوطتنا الباحثين لتحقيق أعماله الكثيرة ودراستها ووضعها في المكان المناسب من سلسلة تاريخ العلم.



المصادر والمراجع

العربية:

١ - **ابن البناء المراكشي**، أبو العباس أحمد بن محمد، **تلخيص أعمال الحساب**، حققه وترجمه وعلّق عليه محمد سويسي، منشورات الجامعة التونسية، ١٩٦٩.

٢ - **ابن البناء المراكشي**، **رفع الحجاب عن وجوه أعمال الحساب**، تحقيق محمد أبلاغ، منشورات كلية الآداب والعلوم الإنسانية، جامعة سيدي محمد بن عبد الله، فاس - المغرب، ١٩٩٤م.

٣ - **ابن طاهر البغدادي**، عبد القاهر، **التكملة في الحساب**، (مع رسالة للمؤلف في المساحة، تحقيق أحمد سليم سعيدان، معهد المخطوطات العربية، الكويت، ١٩٨٥م.

٤ - **ابن غازي المكناسي الفاسي**، أبو عبد الله محمد بن أحمد، **بغية الطلاب في شرح منية الحساب**، تحقيق وتقديم محمد سويسي، منشورات معهد التراث العلمي العربي بجامعة حلب، ١٩٨٣م.

٥ - **ابن منعم العبدري**، أبو جعفر أحمد بن إبراهيم، **فقه الحساب**، تقديم إدريس لمرابط، دار الأمان، الرباط، ٢٠٠٥م.

٦ - **ابن الياسمين**، **الأعمال الرياضية لابن الياسمين**، أطروحة ماجستير قدمها الطالب التهامي زمولي، بالمدرسة العليا للأساتذة بالجزائر في سنة ١٩٩٣.

٧ - **الأقليدسي**، أبو الحسن أحمد بن إبراهيم، **الفصول في الحساب الهندي**، تحقيق أحمد سعيدان، الطبعة الثانية، منشورات معهد التراث العلمي العربي بجامعة حلب، ١٩٨٤م.

٨ - **الأموي**، يعيش بن إبراهيم، **مراسم الانتساب في معالم الحساب**، تحقيق أحمد سليم سعيدان، منشورات معهد التراث العلمي العربي بجامعة حلب، ١٩٨١م.

٩ - **البغدادي**، إسماعيل باشا، **هدية العارفين - أسماء المؤلفين وآثار المصنفين** - منشورات مكتبة المثنى، بغداد، د. ت، المجلد الثاني.

١٠- **البوزجاني**، أبو الوفاء، **تاريخ علم الحساب العربي - الجزء الأول (حساب اليد) - تحقيق لكتاب المنازل السبع لأبي الوفاء البوزجاني**، مع مقدمة ودراسة بالمقارنة بكتاب الكافي في الحساب لأبي بكر الكرجي الحاسب، بقلم أحمد سليم سعيدان، عمان بالأردن، ١٩٧١م.

١١- **حاجي خليفة**، مصطفى بن عبد الله، **كشف الظنون عن أسامي الكتب والفنون**، منشورات مكتبة المثنى، بغداد، د.ت.

١٢- **حميدان**، زهير، **أعلام الحضارة العربية الإسلامية في العلوم الأساسية والتطبيقية**، منشورات وزارة الثقافة، دمشق - سورية، ١٩٩٦م.

١٣- **خوري**، إبراهيم، **فهرس مخطوطات دار الكتب الظاهرية - علم الهيئة وملحقاته-**، مطبوعات مجمع اللغة العربية بدمشق، دمشق، ١٩٦٩م.

١٤- **سبط المارديني**، بدر الدين محمد بن محمد، **مخطوطة إرشاد الطلاب إلى وسيلة الحساب**، تحقيق ودراسة وتحليل مصطفى موالدي، منشورات جامعة حلب - معهد التراث العلمي العربي -، ٢٠٠٤م.

١٥- **الصوفي**، محمد بن أبي الفتح محمد بن الشرقي أبي الروح عيسى بن أحمد، **إرشاد العجم لأعمال الجذور الصم**، مخطوطة دار الكتب المصرية، رقم ٦٦٣.

١٦- **الطوسي**، نصير الدين، **جوامع الحساب بالتخت والتراب**، تحرير أحمد سليم سعيدان، مجلة أبحاث الجامعة الأمريكية، بيروت، ١٩٦٧.

١٧- **العاملي**، بهاء الدين، **رياضيات بهاء الدين العاملي**، تحقيق جلال شوقي، منشورات معهد التراث العلمي العربي بجامعة حلب، ١٩٧٦م.

١٨- **العزاوي**، عباس، **تاريخ علم الفلك في العراق**، مطبوعات المجمع العلمي العراقي، العراق، ١٩٥٨م.

١٩- **الفارسي**، كمال الدين، **أساس القواعد في أصول الفوائد**، تحقيق مصطفى موالدي، معهد المخطوطات العربية، القاهرة، ١٩٩٤م.

٢٠- **فروخ**، عمر، **معالم الأدب العربي في العصر الحديث**، دار العلم للملايين، بيروت- لبنان، ١٩٨٦م.

٢١- **الكاشي**، جمشيد، **مفتاح الحساب**، تحقيق نادر النابلسي، مطبوعات وزارة التعليم العالي، دمشق، ١٩٧٧م.

٢٢- **كحالة**، عمر رضا، **معجم المؤلفين - تراجم مصنفي الكتب العربية** - طبع بنفقة رفعت رضا كحالة، مطبعة الترقي بدمشق، ١٣٧٧هـ/ ١٩٥٩م.

٢٣- **الكرجي**، أبو بكر محمد بن الحسن، **الكافي في الحساب**، درسه وحققه وشرحه سامي شلهوب، منشورات معهد التراث العلمي العربي بجامعة حلب، ١٩٨٦م.

٢٤- **كنج**، ديفيد، **فهرس المخطوطات العلمية المحفوظة بدار الكتب المصرية**، الهيئة المصرية العامة للكتاب بالتعاون مع مركز البحوث الأمريكي بمصر ومؤسسة سميشونيان، القاهرة، ١٩٨١م.

٢٥- **كونتش**، باول، **فهرس المخطوطات المصورة**، الجزء الثالث: العلوم، القسم الأول: الفلك، التنجيم، الميقات، مطبعة الترقي بدمشق، ١٣٧٧هـ/ ١٩٥٩م.

٢٦- **يوشكوفيتش**، **إنجازات العلماء الصينيين في الرياضة** «من تاريخ العلوم والتكنيك الصيني»، (باللغة الروسية)، موسكو، ١٩٥٥م.

الأجنبية:

27. BOULAHIA, Néjib., Algorithmes et Approximations, Tunis, 1987.
28. GUNTHER, Geschichte der Mathematik, Leipzig,1908.
29. LAMRABET, Driss., Introduction à l'Histoire des Mathématiques Maghrébines, Rabat,1994.
30. MARTZLOFF, J.-C., Histoire des Mathématiques chinoises, Masson, Paris, 1988.
31. MAWALDI, Moustafa, L'Algèbre de Kamāl Al – Dīn Al – Fārisī, (Édition critique, Analyse Mathématique et Étude historique), En 3Tomes, (Thèse du Nouveau Doctorat), (ParisIII), 1989.
32. ROSENFELD (B.) & IHSAN OGLU (E.), Mathematicians, Astronomers & Other Scholars of Islamic Civilization and their Works (7^{th} – 19^{th} C.), Research Center for Islamic History, Art and Culture, Istanbul,2003.
33. SMITH, D. E., History of Mathematics, Volume II, Dover Publications, New York, 1958.
34. YOUSCHKEVITCH, A., Les Mathématiques Arabes, Vrin, Paris, 1976.



فهرس المحتوى

الموضوع الصفحة

الموضوع الصفحة



Al-Furqān Islamic Heritage Foundation

22A Old Court Place
London W8 4PL, UK
Tel: + 44 203 130 1530
Fax: + 44 207 937 2540
Email: info@al-furqan.com
Url: www.al-furqan.com

ISBN: 1-905122-35-7

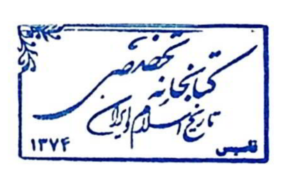
Irshād al-ʿUjm li Aʿmāl al-Judhūr al-Ṣum

Guide to Operations on Irrational Radicals for Neophytes

by: Muḥammad b. Abī al-Fatḥ Muḥammad b. al-Sharqī Abī al-Rūḥ ʿĪsā b. Aḥmad al-Ṣūfī al-Shāfiʿī al-Miṣrī

Edited, annotated & introduced by:

Moustafa Mawaldi





Al-Furqān Islamic Heritage Foundation

Irshād al-ʿUjm li Aʿmāl al-Judhūr al-Ṣum

Guide to Operations on Irrational Radicals for Neophytes

by: Muḥammad b. Abī al-Fatḥ Muḥammad b. al-Sharqī Abī al-Rūḥ ʿĪsā b. Aḥmad al-Ṣūfī al-Shāfiʿī al-Miṣrī



Edited, annotated & introduced by:

Moustafa Mawaldi



Al-Furqān Islamic Heritage Foundation